Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Patrick Overath

Übungen zur Vorlesung
Geometrische Analysis I – Differentialgeometrie für Kurven und Flächen Teil II
Serie 3 vom 25.5.2011
Abgabedatum: 6.6.2011

Aufgabe 1 **[Laplace-Beltrami Operator]** Sei $X \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Immersion mit erster Fundamentalform (g_{ij}) mit zugehöriger Determinante $g := \det(g_{ij})$, und es sei $f \in C^2(\Omega)$. Beweisen Sie:

(i) Für den Laplace-Beltrami Operator Δ^g gilt:

$$\Delta^g f = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j f),$$

wobei g^{ij} die Koeffizienten der Inversen von (g_{ij}) bezeichnet.

(ii) Für eine Funktion $h \in C^2(\mathbb{R})$ gelten die Identitäten

$$\begin{aligned} \nabla^g (h \circ f) &= h'(f) \nabla^g f, && (1) \\ \nabla_i \partial_j (h \circ f) &= h''(f) \partial_i f \partial_j f + h'(f) \nabla_i \partial_j f, && (2) \\ \Delta^g (h \circ f) &= h''(f) g(\nabla^g f, \nabla^g f) + h'(f) \Delta^g f, && (3) \end{aligned}$$

wobei ∇_i die Levi-Civita Ableitung (vgl. Def. 4.15 (ii) der Vorlesung) bezeichnet.

Hinweis: Für Teil (i) *ist es hilfreich, zunächst die Identität* $\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \sqrt{g} = \Gamma^j_{ij}$ *nachzuweisen, wobei* Γ^t_{ij} *für* $t, i, j \in \{1, \ldots, n\}$ *die Christoffel-Symbole bezeichnen.*

Aufgabe 2 **[Levi-Civita Ableitungen auf Rotationsflächen]** Sei X die Parametrisierung einer Rotationsfläche im $\mathbb{R}^3$ mit einer um die z-Achse rotierten und nach der Bogenlänge parametrisierten Profilkurve $t \mapsto (p^1(t), 0, p^3(t))^T$, $p^1(t) > 0$ für alle $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ (vgl. Beispiel $\boxed{11}$ aus Kapitel 3 der Vorlesung). Berechnen Sie die Levi-Civita Ableitungen $\nabla_t \partial_t X$, $\nabla_t \partial_s X$, $\nabla_s \partial_s X$, und bestimmen Sie die Christoffel-Symbole Γ^k_{ij}, also die Koeffizienten dieser Ableitungen in der Basis $\{\partial_t X, \partial_s X\}$.

Aufgabe 3 **[Konforme Parameter]**

Eine zweidimensionale Fläche $\Sigma = X(\Omega) \subset \mathbb{R}^N$ für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ heißt *konform parametrisiert*, falls für die Koeffizienten g_{ij} der ersten Fundamentalform die Beziehungen $g_{11} = g_{22}$ und $g_{12} = 0$ auf Ω gelten.

(i) Bestimmen Sie die Christoffelsymbole Γ_{ij}^k in Abhängigkeit vom sogenannten *konformen Faktor* $\lambda^2 := g_{11} : \Omega \to \mathbb{R}_+$.

(ii) Zeigen Sie für eine konform parametrisierte zweidimensionale Fläche $\Sigma = X(\Omega)$ im $\mathbb{R}^3$ mit dem konformen Faktor λ^2 die Beziehung

$$\Delta X = 2\lambda^2 H \nu,$$

wobei H die mittlere Krümmung und ν die Gaußabbildung von X und Δ den gewöhnlichen Laplace Operator bezeichnet. Vergleichen Sie diese Differentialgleichung mit der Laplace-Beltrami Gleichung, Satz 4.21 der Vorlesung.

Aufgabe 4 **[Extremalbedingungen für Funktionen auf Hyperflächen]**

Zeigen Sie: Sei $X \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine immergierte Hyperfläche mit Gaußabbildung $\nu \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ und zweiter Fundamentalform h. Wenn die Einschränkung $f := F \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$ einer Funktion $F \in C^2(\mathbb{R}^{n+1})$ in $w_0 \in \Omega$ ein Maximum annimmt, dann gibt es einen sogenannten *Lagrange-Parameter* $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass

$$\nabla F(X(w_0)) = \lambda \nu(w_0) \text{ und } \partial^2 F(X(w_0))[\cdot,\cdot] + \lambda h(w_0)[\cdot,\cdot] \quad \text{negativ semi-definit ist.}$$

Zeigen Sie umgekehrt: Falls diese Gleichung gilt und die Bilinearform $\partial^2 F(X(w_0))[\cdot,\cdot] + \lambda h(w_0)[\cdot,\cdot]$ negativ definit ist, dann besitzt f in $w_0 \in \Omega$ ein lokales Minimum.
