Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Patrick Overath

Übungen zur Vorlesung Geometrische Analysis I – Differentialgeometrie für Kurven und Flächen Teil II Serie 4 vom 9.6.2011 Abgabedatum: 29.6.2011

Aufgabe 1 **[Distanzfunktionen]** Für eine Menge $E \subset \mathbb{R}^N$ sei $\operatorname{dist}(x,E) := \inf_{y\in E}|x-y|$ die *Distanzfunktion zu* E und die Funktion

$$\operatorname{dist}_\sigma(x,E) := \operatorname{dist}(x,E) - \operatorname{dist}(x,\mathbb{R}^N\setminus E)$$

die *signierte Distanzfunktion zu* E. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

(i) $\operatorname{dist}_\sigma(x,E) = -\operatorname{dist}(x,\partial E)$ für alle $x \in E$, und andererseits $\operatorname{dist}_\sigma(x,E) = \operatorname{dist}(x,\partial E)$ für alle $x \in \mathbb{R}^N \setminus E$. Zusätzlich gilt für alle $x \in \mathbb{R}^N$ die Identität $\operatorname{dist}_\sigma(x,E) = -\operatorname{dist}_\sigma(x,\mathbb{R}^N\setminus E)$.

(ii) Für $E \subset F$ gilt $\operatorname{dist}_\sigma(x,E) \geq \operatorname{dist}_\sigma(x,F)$.

(iii) Die Funktionen $x \mapsto \operatorname{dist}(x,E)$ und $x \mapsto \operatorname{dist}_\sigma(x,E)$ sind Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante 1.

Aufgabe 2 **[Verbindungskurven in Lipschitzgebieten]** Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Dann existiert eine Konstante $C = C(\Omega) \geq 1$, so dass für alle Punkte $w, \bar{w} \in \bar{\Omega}$ eine Kurve $c \in C^1([0,1],\mathbb{R}^n)$ mit $c([0,1]) \subset \bar{\Omega}$ mit $c(0) = w$ und $c(1) = \bar{w}$ existiert, so dass deren Länge gegen die euklidische Distanz abgeschätzt ist:

$$\mathscr{L}_{[0,1]}(c) = \int_0^1 |c'(\tau)|\,d\tau \leq C(\Omega)|w-\bar{w}|.$$

Aufgabe 3 **[Abschneidefunktionen]**

(i) Konstruieren Sie eine Abschneidefunktion $\varphi \in C_0^\infty(B_\delta(w_0))$ mit den Eigenschaften, dass $\varphi \equiv 1$ auf dem offenen Ball $B_{\delta/2}(w_0) \subset \mathbb{R}^n$, $0 \le \varphi \le 1$ auf $\mathbb{R}^n$ und $|\nabla\varphi| \le 4/\delta$.

(ii) Seien $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \infty$ gegeben. Konstruieren Sie eine Funktion $\eta \in C^\infty([0,\infty))$ mit den Eigenschaften $\eta(r) = r$ für alle $r \in [0,\varepsilon_0]$, $\eta((\varepsilon_0,\infty)) = (\varepsilon_0,\varepsilon_1)$ und $0 < \eta' \le 1$ auf $[0,\infty)$.

Hinweis: Benutzen Sie für Teil (i) die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & \textit{für} \;\; |x| < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

als Konstruktionselement.

Für Teil (ii) versuche man den Ansatz $\eta(r) := \int_0^r (1-\mu(k(t-\varepsilon_0)))^2 \, dt$ *für eine hinreichend große Konstante* $k \in \mathbb{R}$, *wobei* $\mu(s) := e^{-1/s}$ *für* $s > 0$ *und* $\mu(s) = 0$ *für alle* $s \le 0$.

Aufgabe 4 **[Katenoid und Wendelfläche]**

Zeigen Sie, dass der Katenoid X_K und die Wendelfläche X_W gegeben durch

$$X_K(t,s) := \begin{pmatrix} \cosh t \cos s \\ \cosh t \sin s \\ t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad X_W(t,s) := \begin{pmatrix} \sinh t \cos s \\ \sinh t \sin s \\ s \end{pmatrix} \qquad \text{für} \;\; (s,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

Minimalflächen sind. Sind beides Rotationsflächen?