Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Sebastian Scholtes

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie für Kurven und Flächen
Serie 1 vom 20.10.2010

Aufgabe 1 **[Isometrien im $\mathbb{R}^N$]**

Eine Abbildung $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ heißt *Isometrie*, wenn $|F(x) - F(y)| = |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^N$. Zeigen Sie:

(i) Die Isometrien des $\mathbb{R}^N$ bilden eine Gruppe mit der Komposition als Gruppenoperation.

(ii) Die Abbildungen $x \mapsto Ox$ für orthogonale Matrizen $O \in O(N)$, und die Translationen $x \mapsto x + b$ für $b \in \mathbb{R}^N$ bilden jeweils Untergruppen der Isometriegruppe des $\mathbb{R}^N$.

(iii) Für jede Isometrie $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ gibt es genau eine orthogonale Matrix $O \in O(N)$ und ein Vektor $b \in \mathbb{R}^N$, so dass $F(x) = Ox + b$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$.

Aufgabe 2 **[Beispiele ebener Kurven]**

(i) Zeigen Sie für die Abbildungen $\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, und $\alpha := \gamma|_{(0,3\pi)}$, dass beide die Einheitskreislinie $\mathbb{S}^1$ parametrisieren aber nicht geometrisch äquivalent sind.

(ii) Skizzieren Sie die Bilder der beiden Kurven $\gamma_1(t) := (\cos t, \sin 2t)$ und $\gamma_2(t) := (\cos 2t, \sin t)$. Ist eine der beiden Abbildungen eine Immersion?

Aufgabe 3 **[Tangential- und Normalraum]**

Sei $X \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ eine Immersion, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist. Zeigen Sie, dass der Tangentialraum $T_w X$ und der Normalraum $N_w X$ für $w \in \Omega$ geometrische Größen sind, d.h., dass für einen Parameterwechsel $\psi : \Omega \to \tilde{\Omega}$ und $X = Y \circ \psi$ gilt: $T_w X = T_{\psi(w)} Y$ und $N_w X = N_{\psi(w)} Y$.

Aufgabe 4 **[Einheitssphäre]**

Zeigen Sie:

(i) Die Einheitssphäre $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ ist eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$.

(ii) Geben Sie eine Immersion an, die die offene obere Halbsphäre $\mathbb{S}^n_o := \mathbb{S}^n \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x^{n+1} > 0\}$ parametrisiert.
