Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Sebastian Scholtes

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie für Kurven und Flächen
Serie 2 vom 9.11.2010
Abgabedatum: 16.11.2010

Aufgabe 1 **[Krümmung von Kurven]**

Zeigen Sie, dass für (nicht notwendig nach der Bogenlänge parametrisierte) Immersionen $\gamma \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ die Krümmung κ durch

$$\kappa(t) := \frac{\det(\gamma'(t)|\gamma''(t))}{|\gamma'(t)|^3}$$

gegeben ist, während für immergierte Raumkurven $\gamma \in C^2(I, \mathbb{R}^3)$ die Krümmung durch

$$\kappa(t) := \frac{|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}$$

dargestellt ist. Leiten Sie abschließend den Ausdruck für die Krümmung eines Graphen

$$\operatorname{graph} f := \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$$

in einem Punkt $(x, f(x))$ her, wobei $f \in C^2([a, b])$.

Aufgabe 2 **[Evoluten]**

Für eine Bogenlängenparametrisierte Kurve $\Gamma \in C^3(I, \mathbb{R}^2)$ auf einem abgeschlossenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit nichtverschwindender Krümmung κ und Einheitsnormalenvektor n heißt

$$E(t) := \Gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} n(t), \quad t \in I,$$

die *Evolute* von Γ.

(i) Zeigen Sie, dass die Tangente der Evolute von Γ bei t normal ist zu Γ an der Stelle t.

(ii) Sei $\mathcal{N}(t)$ die *Normale* an Γ durch den Punkt $\Gamma(t)$, d.h. die Gerade durch $\Gamma(t)$, deren Richtungsvektor der Einheitsnormalenvektor $n(t)$ ist. Zeigen Sie, dass für $|t-\tau| \ll 1$ der Schnitt $\mathcal{N}(t) \cap \mathcal{N}(\tau)$ nicht leer ist, und dass

$$\lim_{\tau \to t} \Big[\mathcal{N}(t) \cap \mathcal{N}(\tau) \Big] \subset E(I).$$

Hinweis: Parametrisieren Sie die Normalen in Abhängigkeit von den Fußpunkten auf Γ und von den Einheitsnormalen in diesen Punkten als Richtungsvektoren. Formen Sie die Bedingung, die ein Schnittpunkt dieser Normalen erfüllt, so um, dass auf der einen Seite ein Differenzenquotient von Γ auftaucht und bilden Sie das Skalarprodukt mit $\Gamma'(t)$, bevor Sie den Grenzübergang $\tau \to t$ untersuchen.

Aufgabe 3 **[Globaler Krümmungsradius]**

Für eine Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$ mit einer Lipschitzstetigen Bogenlängenparametrisierung $\Gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^N$ definiert die Größe

$$\rho_G[\gamma](s) := \inf_{\substack{\tau \neq \sigma \neq s \neq \tau \\ \tau, \sigma \in [0,L]}} R(\Gamma(s), \Gamma(\sigma), \Gamma(\tau))$$

den *globalen Krümmungsradius* von γ an der Stelle $s \in [0, L]$. Hierbei is $R(x, y, z)$ der Radius des kleinsten Kreises, der die Punkte $x, y, z \in \mathbb{R}^N$ enthält:

$$R(x, y, z) := \begin{cases} \frac{|x-y|}{2|\sin \sphericalangle(x-z, y-z)|} & \text{für } x, y, z \text{ nicht kollinear,} \\ |x - y|/2 & \text{für } z = x \text{ oder } z = y \\ \infty & \text{für } x, y, z \text{ kollinear mit } x \neq y \neq z \neq x. \end{cases}$$

Zeigen Sie

(i) Falls $\rho_G(\gamma) \geq \theta > 0$ für alle $s \in [0, L]$, dann ist γ einfach, d.h. Γ ist injektiv.

(ii) Falls die Bogenlängenparametrisierung von der Klasse $C^2([0, L], \mathbb{R}^3)$ ist, dann gilt

$$\lim_{\substack{\tau \to s, \sigma \to s \\ \tau \neq \rho \neq s \neq \tau}} R(\Gamma(s), \Gamma(\sigma), \Gamma(\tau)) = \frac{1}{|\Gamma''(s)|} = \frac{1}{\kappa(s)}.$$

Aufgabe 4 **[Vergleichssatz für die Krümmung]**

Zeigen Sie:

Für eine auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\Gamma \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ mit $\Gamma(I) \subset \overline{B_R(0)}$, und $\Gamma(t_0) \in \partial B_R(0)$ für ein $t_0 \in I$ gilt $|\kappa(t_0)| \geq 1/R$. Hierbei ist

$$B_R(0) := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R\}$$

die offene Kreisscheibe mit Radius R.
