Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Sebastian Scholtes

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie für Kurven und Flächen
Serie 3 vom 16.11.2010
Abgabedatum: 23.11.2010

Aufgabe 1 **[Frenetgleichungen für Raumkurven]**

Sei $\Gamma \in C^3(I, \mathbb{R}^3)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit positiver Krümmung $\kappa(s) > 0$ für alle $s \in I$. Zeigen Sie die Gültigkeit der Frenetschen Gleichungen

$$\begin{pmatrix} T(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{pmatrix},$$

wobei T der Einheitstangentenvektor, n der Einheitsnormalenvektor, und $b := T \wedge n$ der *Binormalenvektor* von Γ ist, und $\tau := n' \cdot b$ die *Torsion* definiert.

Aufgabe 2 **[Umlaufzahl]**

Zeigen Sie, dass die Umlaufzahl n_Γ einer nach der Bogenlänge parametrisierten geschlossenen Kurve $\Gamma \in C^1(\mathbb{R}/L\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2)$, $L > 0$, eine geometrische Größe ist. D.h. falls zwei Bogenlängenparametrisierungen Γ_1 und Γ_2 die Beziehung $\Gamma_1 = \Gamma_2 \circ \psi$ mit einem Diffeomorphismus ψ erfüllen, dann ist $n_{\Gamma_1} = \pm n_{\Gamma_2}$, je nachdem ob $\psi' > 0$ (ψ orientierungserhaltend) oder $\psi' < 0$ (ψ orientierungsumkehrend) ist.

Hinweis: Machen Sie sich zunächst klar, welche Form ψ nur haben kann, damit es eine Bogenlängenparametrisierung in eine andere Bogenlängenparametrisierung überführen kann. Dann verschaffen Sie sich mit Hilfe einer (beliebigen) Winkelfunktion $\varphi_2 \in C^0(\mathbb{R})$ für Γ_2 eine Winkelfunktion $\varphi_1 \in C^0(\mathbb{R})$ für Γ_1, um die Differenz der zugehörigen Umlaufzahlen auszurechnen.

Aufgabe 3 **[Parallelkurven]**

Sei $\Gamma \in C^2(\mathbb{R}/L\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2)$ die Bogenlängenparametrisierung einer einfachen geschlossenen ebenen konvexen Kurve, die positiv orientiert ist. Dann heißt die Kurve $P_\Gamma(s) := \Gamma(s) - rn(s)$ die zu Γ gehörige *Parallelkurve* im Abstand $r > 0$, wobei n der Einheitsnormalenvektor von Γ ist. Zeigen Sie:

(i) Für die Länge $\mathscr{L}$ gilt: $\mathscr{L}(P_\Gamma) = \mathscr{L}(\Gamma) + 2\pi r$.

(ii) Für den von den Kurven eingeschlossenen Flächeninhalt $\mathscr{A}$ gilt: $\mathscr{A}(P_\Gamma) = \mathscr{A}(\Gamma) + rL + \pi r^2$.

Hinweis: Für eine einfache geschlossene, positiv orientierte ebene Kurve $t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in [0, L]$*, ist der eingeschlossene Flächeninhalt* A *beispielsweise gegeben durch*

$$A = \frac{1}{2} \int_0^L (xy' - yx')\, dt.$$

(iii) Falls $\Gamma \in C^3(\mathbb{R}/L\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2)$ gilt für die Krümmung κ die Beziehung:

$$\kappa_{P_\Gamma}(s) = \kappa_\Gamma(s)/(1 + r\kappa_\Gamma(s)).$$

Aufgabe 4 **[Längenabschätzung]**

(i) Zeigen Sie für eine nach der Bogenlänge parametrisierte ebene einfache geschlossene Kurve $\Gamma \in C^2(\mathbb{R}/L\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2)$ mit der Krümmungsschranke $0 < \kappa_\Gamma \leq c$ die Längenabschätzung

$$\mathscr{L}(\Gamma) \geq \frac{2\pi}{c}.$$

(ii) Ersetze in Teil (i) die Voraussetzung "einfach" durch: "$n_\Gamma = M$", und beweise dann die Abschätzung

$$\mathscr{L}(\Gamma) \geq \frac{2\pi M}{c}.$$
