Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Dipl. Math. Sebastian Scholtes

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie für Kurven und Flächen
Serie 4 vom 26.11.2010
Abgabedatum: 7.12.2010

Aufgabe 1 **[Erste Fundamentalform von Graphen]**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega)$. Berechnen Sie die erste Fundamentalform des Graphen

$$\Sigma := \operatorname{graph} f := \{x = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x^1, \dots, x^n) \in \Omega, x^{n+1} = f(x^1, \dots, x^n)\},$$

und geben Sie eine Formel für den Flächeninhalt von Σ an.

Aufgabe 2 **[Torus]**

(i) Die Abbildung $X : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$X(u,v) := \begin{pmatrix} (r\cos u + a)\cos v \\ (r\cos u + a)\sin v \\ r \sin u \end{pmatrix}, \quad u, v \in (0, 2\pi),$$

parametrisiert für $a > r > 0$ einen Torus. Berechnen Sie mit der Formel für das Flächenfunktional $\mathscr{A}(X)$ den Oberflächeninhalt des Torus. *Hinweis: Schränken Sie zunächst den Parameterbereich auf die abgeschlossene Menge* $[\epsilon, 2\pi - \epsilon] \times [\epsilon, 2\pi - \epsilon]$ *für kleines* $\epsilon > 0$ *ein, um mit eigentlichen Integralen zu arbeiten, und betrachten Sie anschließend den Grenzübergang* $\epsilon \to 0$.

(ii) Stellen Sie den Torus als Urbild eines regulären Wertes einer geeigneten Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dar.

Aufgabe 3 **[Loxodromen (Rhombenlinien)]** Benutzen Sie die Parametrisierung

$$X(\varphi, \vartheta) := \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

der sphärischen Menge $\Sigma := \mathbb{S}^2 \setminus \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y = 0\}$, um auf Σ die *Loxodromen (Rhombenlinien)* zu bestimmen, d.h. die Kurven auf Σ, welche mit den Meridianen $\varphi = const.$ einen konstanten Winkel β bilden. *Hinweis: Wenn Sie die gesuchten Kurven als Bild von Parameterkurven* $\alpha(t) = (\varphi(t), \vartheta(t))$ *unter der Immersion* X *darstellen, können Sie aus der Winkelbedingung eine Differentialgleichung herleiten, die nach Integration die gewünschte Beziehung zwischen* $\varphi(t)$ *und* $\vartheta(t)$ *herstellt.*

Aufgabe 4 **[Tangentenflächen]**

Sei $\Gamma \in C^2(I, \mathbb{R}^3)$ eine auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte Bogenlängenparametrisierung einer immergierten Raumkurve mit nichtverschwindender Krümmung. Die Abbildung

$$X(s,v) := \Gamma(s) + v\Gamma'(s), \quad s \in I, v \in \mathbb{R},$$

parametrisiert die sogenannte *Tangentenfläche* von Γ. Zeigen Sie, dass $X|_{I\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})}$ eine Immersion ist und berechnen Sie deren erste Fundamentalform. Zeigen Sie insbesondere, dass diese nur von der Krümmung von Γ abhängt. Wieso folgt daraus, dass X isometrisch zu einer Parametrisierung eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist? *Hinweis für die Beantwortung der letzten Frage: Nutzen Sie Satz 2.10 der Vorlesung, um mit einer ebenen, nach der Bogenlänge parametrisierten Leitkurve* $\tilde{\Gamma}$ *mit derselben Krümmung wie* Γ *eine planare Tangentenfläche zu konstruieren.*
