Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie für Kurven und Flächen
Serie 5 vom 20.1.2011
Abgabedatum: 28.1.2011

Aufgabe 1 [Minimalflächen: Katenoid und Helikoid]

- (i) Zeigen Sie, dass die Immersionen $X, Y \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$

$$X(u, v) := (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)^T, \quad Y(u, v) := (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, v)^T,$$

isometrisch sind, und dass X eine Rotationsfläche und Y eine Regelfläche parametrisiert. Dabei ist eine *Regelfläche* eine parametrisierte Fläche mit einer Parametrisierung $R(s, t) := \alpha(t) + s\beta(t)$, die für $|s|$ hinreichend klein sogar eine Immersion ist, wobei $\alpha \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^3)$ eine immergierte Kurve ist, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und $\beta \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, so dass $\alpha'(\tau)$ und $\beta(\tau)$ linear unabhängig sind für alle $\tau \in \bar{I}$.

- (ii) Berechnen Sie für X und Y jeweils die zweite Fundamentalform.

Aufgabe 2 [Winkel- und Flächentreue]

Zwei Immersionen $X, \tilde{X} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \leq N$, heißen *winkeltreu*, wenn die Koeffizienten der ersten Fundamentalformen g_{ij} von X und $\tilde{g}_{ij}$ von $\tilde{X}$ die Gleichung

$$\tilde{g}_{ij}(w) = \lambda^2(w)g_{ij}(w) \quad \text{für alle } w \in \Omega$$

erfüllen, wobei $\lambda \in C^1(\Omega)$ mit $\lambda(w) \neq 0$ für alle $w \in \Omega$. Die Immersionen heißen dagegen *flächentreu*, wenn der Flächeninhalt $\mathcal{A}$ die Relation

$$\mathcal{A}_C(X) = \mathcal{A}_C(\tilde{X}) \quad \text{für alle kompakten Teilmengen } C \subset \Omega$$

erfüllt.

Zeigen Sie, dass zwei Immersionen, die gleichzeitig flächentreu und winkeltreu sind, isometrisch zueinander sind.

Aufgabe 3 [Diffeomorphe Flächen]

- (i) Sei $\mathcal{N} := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y = 0\}$. Zeigen Sie mit Hilfe geeigneter Parametrisierungen, dass die Teilmenge $\mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{N}$ der Einheitssphäre $\mathbb{S}^2 := \{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi| = 1\}$ diffeomorph zur Teilmenge $\mathcal{E}^2 \setminus \mathcal{N}$ des Ellipsoids

$$\mathcal{E}^2 := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$$

ist.

- (ii) Sei $F \in C^k(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $\text{graph } F \subset \mathbb{R}^{n+1}$ der Graph dieser Funktion gegeben durch

$$\text{graph } F := \{(x^1, \dots, x^n, F(x^1, \dots, x^n)) : (x^1, \dots, x^n) \in \Omega\}.$$

Zeigen Sie, dass $\text{graph } F$ diffeomorph zu Ω ist.

Aufgabe 4 [Differential von Abbildungen zwischen Immersionen]

Zeigen Sie, dass die Definition des Differentials

$$df_p : T_p \Sigma \cong T_w X \rightarrow T_{f(p)} \tilde{\Sigma} \cong T_{\tilde{w}} \tilde{X}, \quad p = X(w) \in \Sigma, w \in \Omega, f(p) = \tilde{X}(\tilde{w}), \tilde{w} \in \tilde{\Omega},$$

einer stetig differenzierbaren Abbildung $f : \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$ zwischen zwei immergierten Flächen $\Sigma = X(\Omega)$ und $\tilde{\Sigma} = \tilde{X}(\tilde{\Omega})$ mittels

$$df_p(V) := \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)|_{t=0}$$

für eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : (-\epsilon_0, \epsilon_0) \rightarrow \Sigma$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = V$ *unabhängig* von der Wahl der Kurve γ ist.