

Übungen zur Vorlesung  
Funktionalanalysis  
Serie 3 vom 29.10.2013  
Abgabedatum: 12.11.2013

---

Aufgabe 9

[Orthogonalsystem und Span]

- (i) Sei  $B_1(0) \subset \mathbb{C}$  der offene Einheitsball in der komplexen Ebene  $\mathbb{C}$  und  $e_k(z) := z^k$  für  $z \in \mathbb{C}$  und  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Zeige, dass  $\{e_0, e_1, \dots\}$  ein *Orthogonalsystem* im Raum  $L^2(B_1(0), \mathbb{C})$  der quadratintegrierbaren komplexwertigen Funktionen auf  $B_1(0)$  ist und berechne  $\|e_k\|_{L^2(B_1(0), \mathbb{C})}$ . (Ein Orthogonalsystem besteht aus zueinander orthogonalen Vektoren, die aber nicht notwendig auf 1 normiert sind.)
- (ii)\* Sei  $\ell^2$  der Raum der *komplexen* quadratsummierbaren Zahlenfolgen mit dem Skalarprodukt

$$\langle A, B \rangle_{\ell^2} := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \overline{b_k} \quad \text{für } A = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}, B = (b_k)_{k \in \mathbb{N}}, a_k, b_k \in \mathbb{C}.$$

Setze für ein  $\alpha \in \mathbb{C}$  mit  $|\alpha| \in (0, 1)$  und  $l \in \mathbb{N}$

$$f_l := (1, \alpha^l, \alpha^{2l}, \alpha^{3l}, \dots).$$

Bestimmen Sie den Abschluss von  $\text{span}\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$  in  $\ell^2$ , also den Abschluss von der Menge aller Linearkombinationen der  $f_l, l \in \mathbb{N}$ .

---

Aufgabe 10

[Offenes Inneres und Abschluss]

Berechne das offene Innere  $\text{int}(A)$  und den Abschluss  $\overline{A}$  der Menge

$$A := \{f \in L^1((-1, 1)) : f > 0 \text{ } \mathcal{L}^1\text{-fast überall}\}.$$

---

## Aufgabe 11

### [Orthogonales Komplement]

Beweisen Sie: Für einen Unterraum  $\mathcal{A}$  eines Hilbertraums  $\mathcal{H}$  gilt

$$\mathcal{A}^\perp = (\overline{\mathcal{A}})^\perp \text{ und } (\mathcal{A}^\perp)^\perp = \overline{\mathcal{A}}.$$

Zeigen Sie außerdem die Äquivalenz

$$\mathcal{A} \text{ liegt dicht in } \mathcal{H} \Leftrightarrow \mathcal{A}^\perp = \{0\}.$$

Welche Aussagen gelten auch in Prähilberträumen? Hierbei bezeichnet für eine Teilmenge  $B$  eines Prähilbertraumes  $\mathcal{H}$  mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$  die Menge

$$B^\perp := \{h \in \mathcal{H} : \langle h, b \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \text{ für alle } b \in B\}$$

das *orthogonale Komplement* von  $B$ .

---

## Aufgabe 12

### [Projektionssatz auf konvexe Mengen]

Eine Teilmenge  $C$  eines linearen Raums heißt *konvex*, wenn mit je zwei Punkten  $x, y \in C$  auch alle *Konvexkombinationen*  $tx + (1-t)y$  für  $t \in [0, 1]$  in  $C$  enthalten sind.

- (i) Zeigen Sie: Sei  $C \subset \mathcal{H}$  eine konvexe, nichtleere und abgeschlossene Teilmenge des Hilbertraums  $\mathcal{H}$ . Dann gibt es zu jedem  $f \in \mathcal{H}$  genau ein  $c \in C$ , so dass

$$\text{dist}(f, C) = \|f - c\|_{\mathcal{H}}.$$

Man nennt  $P(f) := c$  dann auch die *orthogonale Projektion* von  $f$  auf  $C$ .

- (ii) Zeigen Sie nun auch, dass die orthogonale Projektion  $P(f)$  durch die folgende Ungleichung charakterisiert ist, dass diese Ungleichung also ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die orthogonale Projektion  $P(f) \in C$  liefert:

$$\text{Re} \langle f - P(f), \tilde{c} - P(f) \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0 \quad \text{für alle } \tilde{c} \in C.$$

---