Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Till Knoke

Übungen zur Vorlesung
Funktionalanalysis
Serie 4 vom 6.11.2013
Abgabedatum: 19.11.2013

Aufgabe 13

[Strikte Konvexität]

Eine abgeschlossene konvexe Menge C in einem linearen Raum $\mathscr{H}$ heißt *strikt konvex*, wenn der Rand $\partial C = \overline{C} \setminus \operatorname{int}(C) = C \setminus \operatorname{int}(C)$ nur aus extremalen Punkten besteht. Dabei heißt ein Punkt $x \in C$ *extremal*, wenn folgendes gilt: Falls $x = ty + (1-t)z$ für irgendwelche $y, z \in C$, $y \neq z$, und $t \in [0,1]$, dann folgt $t \in \{0,1\}$.

Zeigen Sie, dass der abgeschlossene Einheitsball

$$\overline{B_1(0)} := \{x \in \mathscr{H} : \|x\|_{\mathscr{H}} \leq 1\}$$

in einem beliebigen Hilbertraum $\mathscr{H}$ strikt konvex ist.

Aufgabe 14

[Vollständiges Orthonormalsystem]

(i) Aus der Fourieranalysis ist bekannt, dass für eine Lipschitz-stetige Funktion $f \in C^{0,1}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle_{L^2} \varphi_k(x) = f(x) \text{ für alle } x \in (-\pi,\pi), \tag{1}$$

wobei

$$\varphi_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \quad x \in (-\pi,\pi), k \in \mathbb{Z},$$

und $\langle g,h \rangle_{L^2} := \int_{-\pi}^{\pi} g(y)\overline{h(y)}\,dy$ für $g,h \in L^2((-\pi,\pi),\mathbb{C})$. Zeigen Sie mit Hilfe von (1), dass $\{\varphi_i : i \in \mathbb{Z}\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem des Hilbertraums $L^2((-\pi,\pi),\mathbb{C})$ bildet. Sie dürfen dazu ohne Beweis annehmen, dass der Raum $C_0^\infty((-\pi,\pi),\mathbb{C})$ der glatten Funktionen mit kompaktem Träger in $(-\pi,\pi)$ dicht in $L^2((-\pi,\pi),\mathbb{C})$ liegt. Auch den Beweis, dass $L^2((-\pi,\pi),\mathbb{C})$ vollständig ist, brauchen Sie hier nicht zu führen.

(ii)* Sei $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\} \subset \mathscr{H}$ ein vollständiges Orthonormalsystem des Hilbertraums $\mathscr{H}$, und für ein weiteres Orthonormalsystem $\{f_1, f_2, \ldots\} \subset \mathscr{H}$ gelte

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_k - f_k\|_{\mathscr{H}}^2 < \infty.$$

Zeigen Sie, dass dann auch $\{f_1, f_2, \ldots\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von $\mathscr{H}$ bildet.

Aufgabe 15

[Lineare Projektionen]

Sei U ein Unterraum des linearen Raumes V, dann heißt eine lineare Abbildung $P : V \to V$ *(lineare) Projektion auf* U, falls $P \circ P = P$ und $\operatorname{im}(P) = U$.

Beweisen Sie:

(i) Die orthogonale Projektion $\pi_A : \mathscr{H} \to A$ auf einen abgeschlossenen Unterraum A eines Hilbertraums $\mathscr{H}$ aus Satz 1.15 der Vorlesung (vgl. Def. 1.16 der Vorlesung) ist eine (lineare) Projektion im obigen Sinne.

(ii) P ist lineare Projektion auf U genau dann, wenn $P : V \to U$ linear und $P = \mathrm{Id}_V$ auf U.

(iii) Ist $P : V \to V$ eine Projektion, dann gilt $V = \ker(P) \oplus \operatorname{im}(P)$, wobei $X \oplus Y$ die *direkte Summe* zweier linearer Unterräume $X, Y \subset V$ mit $X \cap Y = \{0\}$ bezeichnet.

(iv) Mit P ist auch $\mathrm{Id}-P$ eine Projektion mit

$$\ker(\mathrm{Id}-P) = \operatorname{im}(P) \text{ und } \operatorname{im}(\mathrm{Id}-P) = \ker(P).$$

Aufgabe 16

[Lineare Operatoren]

Sei $\mathscr{L}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ die Menge der *lineare Operatoren,* d.h. der linearen und stetigen Abbildungen von $\mathscr{V}$ nach $\mathscr{W}$, wobei $\mathscr{V}$ und $\mathscr{W}$ lineare normierte Räume sind.

Zeigen Sie:

(i) $\mathscr{L}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ ist mit der *Operatornorm*

$$\|T\|_{\mathscr{L}(\mathscr{V},\mathscr{W})} := \sup_{\substack{v \in \mathscr{V} \\ \|v\|_{\mathscr{V}} \leq 1}} \|Tv\|_{\mathscr{W}}$$

ein normierter linearer Raum.

(ii) $(\mathscr{L}(\mathscr{V}, \mathscr{W}), \|\cdot\|_{\mathscr{L}(\mathscr{V},\mathscr{W})})$ ist ein Banachraum, falls $\mathscr{W}$ ein Banachraum ist.

(iii) Sei $\mathscr{Z}$ ein weiterer normierter linearer Raum. Dann ist für $T \in \mathscr{L}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ und $S \in \mathscr{L}(\mathscr{W}, \mathscr{Z})$ die Komposition $ST = S \circ T \in \mathscr{L}(\mathscr{V}, \mathscr{Z})$ und genügt der Abschätzung

$$\|ST\|_{\mathscr{L}(\mathscr{V},\mathscr{Z})} \leq \|S\|_{\mathscr{L}(\mathscr{W},\mathscr{Z})} \cdot \|T\|_{\mathscr{L}(\mathscr{V},\mathscr{W})}.$$
