Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Till Knoke

# Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis Serie 5 vom 12.11.2013 Abgabedatum: 26.11.2013

---

## Aufgabe 17

**[Nichtstetige lineare Abbildung]**

Zeigen Sie, dass der Differentialoperator $T : C^1([-2,2]) \to L^2((-2,2))$ definiert durch $Tf(x) := f'(x)$, $x \in [-2,2]$ für $f \in C^1([-2,2])$ zwar linear, aber nicht stetig ist (bezüglich der $L^2$-Norm in Bild- und Urbildraum).

*Hinweis: Sie können zum Beispiel eine Funktion $\varphi \in C_0^\infty([-2,2])$ mit $\varphi(x) = 0$ für $|x| \geq 1$ geeignet skalieren, um eine auf Eins normierte Funktionenfolge zu konstruieren, entlang derer die Bilder dieser Folge beliebig große Normen erreichen. Sie können die Existenz einer solchen Funktion $\varphi$ ohne Beweis annehmen.*

---

## Aufgabe 18

**[Fortsetzung stetiger Abbildungen]**

Zeigen Sie:

(i) Sei $(\mathscr{M}, d_{\mathscr{M}})$ ein metrischer Raum mit Metrik $d_{\mathscr{M}}$ und $\mathscr{D} \subset \mathscr{M}$ eine dichte Teilmenge, sowie $(\mathscr{N}, d_{\mathscr{N}})$ ein vollständiger metrischer Raum mit Metrik $d_{\mathscr{N}}$. Dann besitzt jede gleichmäßig stetige Funktion $f : \mathscr{D} \to \mathscr{N}$ genau eine gleichmäßig stetige Fortsetzung $F : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$.

(ii) Seien $\mathscr{V}, \mathscr{W}$ normierte lineare Räume, $\mathscr{W}$ sei vollständig, $\mathscr{Z} \subset \mathscr{V}$ ein dichter Unterraum von $\mathscr{V}$ und $T \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}, \mathscr{W})$ ein linearer (stetiger) Operator. Dann gibt es genau eine stetige Fortsetzung $\tilde{T}$ von $T$ auf $\mathscr{V}$, also $\tilde{T} \in \mathscr{L}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ mit $\tilde{T}|_{\mathscr{Z}} = T$.

(iii) Seien $\mathscr{V}, \mathscr{W}$ normierte lineare Räume, $\mathscr{W}$ sei vollständig und $\mathscr{D} \subset \mathscr{V}$ sei eine dichte Teilmenge. Falls für eine beschränkte Folge $(T_k)_k \subset \mathscr{L}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ und für jedes $v \in \mathscr{D}$ der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} T_k v$ existiert, so existiert auch

$$Tv := \lim_{k\to\infty} T_k v \qquad \text{für alle } v \in \mathscr{V}, \tag{1}$$

und es ist $T \in \mathscr{L}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$.

*Hinweis: Machen Sie sich zunächst klar, dass man den punktweisen Grenzwert nicht nur auf $\mathscr{D}$, sondern auch auf dessen span erhält, und dass diese Fortsetzung bereits linear und stetig ist. Dann benutzen Sie Teil (ii) für die Fortsetzung auf den Ganzraum und beweisen damit abschließend* (1).

---

## Aufgabe 19

**[Dualraum und Satz von F. Riesz]**

(i) Sei $T : C^0([0,1]) \to \mathbb{R}$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und paarweise verschiedenen Stützstellen $t_i \in [0,1]$, $i = 1,\ldots,m$, definiert durch

$$Tf := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(t_i).$$

Zeigen Sie, dass $T \in (C^0([0,1]))' = \mathscr{L}(C^0([0,1]),\mathbb{R})$, und berechnen Sie die Dualraumnorm $\|T\|_{(C^0([0,1]))'} = \|T\|_{\mathscr{L}(C^0([0,1]),\mathbb{R})}$.

(ii) Sei $T : C^0([0,1]) \to \mathbb{R}$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und paarweise verschiedenen Stützstellen $t_i \in [0,1]$, $i = 1,\ldots,m$, definiert durch

$$Tf := \int_0^1 f(t)\,dt - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(t_i).$$

Zeigen Sie, dass $T \in (C^0([0,1]))' = \mathscr{L}(C^0([0,1]),\mathbb{R})$, und berechnen Sie die Dualraumnorm $\|T\|_{(C^0([0,1]))'} = \|T\|_{\mathscr{L}(C^0([0,1]),\mathbb{R})}$.

(iii)* Sei $\mathscr{H}$ ein separabler Hilbertraum mit einem vollständigen Orthonormalsystem (VONS) $\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots\} \subset \mathscr{H}$. Beweisen Sie den Rieszschen Darstellungssatz unter Benutzung dieses VONS, indem Sie zu einem beliebigen Dualraumelement $T \in \mathscr{H}'$ das gesuchte Element $g \in \mathscr{H}$ mit $Tf = \langle f,g\rangle_{\mathscr{H}}$ in Termen des VONS darstellen und die Konvergenz dieser Darstellung beweisen.

---

## Aufgabe 20

**[Eigenwertproblem für Integraloperator]**

Sei $K \in L^2(\Omega\times\Omega)$, d.h.,

$$\|K\|^2_{L^2(\Omega\times\Omega)} := \int_\Omega \Big(\int_\Omega |K(x,y)|^2\,dy\Big)\,dx < \infty,$$

und sei $f \in L^2(\Omega)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge ist. Zeigen Sie, dass für $\lambda \in (\|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)},\infty)$ genau eine Lösung $u \in L^2(\Omega)$ der Integralgleichung

$$\int_\Omega K(x,y)u(y)\,dy = \lambda u(x) + f(x) \quad \text{für } \mathscr{L}^n\text{-fast alle } x \in \Omega$$

existiert.

*Hinweis: Weisen Sie die Voraussetzungen zum Satz von Lax-Milgram in der Variante für koerzive Operatoren nach. Beachten Sie bei Ihrer Argumentation die korrekte Anwendung des Satzes von Fubini.*

---