

Übungen zur Vorlesung
Funktionalanalysis
Serie 6 vom 20.11.2013
Abgabedatum: 3.12.2013

Aufgabe 21

[Heisenberg Unschärferelation]

Beweisen Sie: Für einen linearen normierten Raum $\mathcal{V} \neq \{0\}$ und zwei lineare Abbildungen $P, Q: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ mit der Eigenschaft $PQ - QP = \text{Id}_{\mathcal{V}}$ gilt: Die Abbildungen P und Q können nicht beide stetig sein.

Hinweis: Berechnen Sie $PQ^n - Q^nP$ und schätzen Sie Operatornormen ab.

Aufgabe 22

[Störungen der Identität]

Zeigen Sie:

- (i) Für einen Banachraum \mathcal{V} und eine Abbildung $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ mit

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})}^{1/m} < 1 \quad (1)$$

gilt: Die *Störung der Identität* $\text{Id}_{\mathcal{V}} - T$ besitzt eine Inverse $(\text{Id}_{\mathcal{V}} - T)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ mit der Darstellung

$$(\text{Id}_{\mathcal{V}} - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k. \quad (2)$$

- (ii) Für zwei Banachräume $\mathcal{V} \neq \{0\}, \mathcal{W} \neq \{0\}$ und $T, S \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ gilt: Ist T invertierbar und $\|T - S\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})} < \|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})}^{-1}$, dann ist auch S invertierbar.
- (iii)* Konstruieren Sie ein Beispiel, welches zeigt, dass man in Teil (i) auf die Vollständigkeit von \mathcal{V} im Allgemeinen *nicht* verzichten kann.

Hinweis: Benutzen Sie (1), um für Teil (i) zu zeigen, dass die Partialsummen der rechten Seite von (2) eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ bilden. Überprüfen Sie abschließend für den Grenzwert die Eigenschaften der (beidseitig) inversen Abbildung. Teil (ii) lässt sich auf Teil (i) zurückführen.

Aufgabe 23

[Sobolevfunktionen I]

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x) := |x|, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

in $W^{1,\infty}(B_1(0))$ liegt.

(ii) Sei $n = 2$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x) := \begin{cases} \log \log \frac{1}{|x|} & \text{für } x \in B_1(0) \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

für $0 < R < 1$ in $W^{1,2}(B_R(0))$ liegt.

(iii) Sei $n = 1$. Ist die *Heavyside-Funktion*

$$u(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

eine Sobolevfunktion? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 24

[Sobolevräume sind Banachräume]

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, $p \in [1, \infty]$ die Sobolevräume $W^{k,p}(\Omega)$ Banachräume bezüglich der Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

sind.

Hinweis: Benutzen Sie die Minkowski-Ungleichung

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{für alle } f, g \in L^p(\Omega)$$

ohne Beweis.