Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Till Knoke

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis Serie 8 vom 4.12.2013 Abgabedatum: 17.12.2013

Aufgabe 29

[Fundamentallemmata]

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $g \in L^1(\Omega)$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen.

(i) $\int_\Omega g(x)\eta(x)\,dx = 0$ für alle $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$.

(ii) $\int_E g(x)\,dx = 0$ für alle messbaren beschränkten Mengen E mit $\overline{E} \subset \Omega$.

(iii) $g(x) = 0$ für $\mathscr{L}^n$-fast alle $x \in \Omega$.

Hinweis: Falten Sie die charakteristischen Funktionen

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1 & \textit{für } x \in E \\ 0 & \textit{für } x \notin E \end{cases}$$

mit geeigneten Abschneidefunktionen, vgl. Aufgabe 26.

Aufgabe 30

[Faltungsoperatoren]

Es sei $\eta \in C_0^\infty(B_1(0))$ mit $\eta \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\,dx = 1$. Die *Faltung* $f^\varepsilon := \eta_\varepsilon \star f$ einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\eta(x/\varepsilon)$ ist definiert durch (vgl. Aufgabe 26)

$$f^\varepsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\,dy \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie für $\varepsilon = \varepsilon_k := 1/k$:

(i) $T_k f := f^{\varepsilon_k}$ definiert einen linearen Operator $T_k \in \mathscr{L}(L^p(\mathbb{R}^n))$ für $p \in [1,\infty]$ mit $\|T_k\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathbb{R}^n))} \leq 1$.

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 26, dass für $p \in [1,\infty)$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

$$(T_k - \mathrm{Id})f \to 0 \text{ in } L^p(\mathbb{R}^n) \text{ für } k \to \infty.$$

(iii)* Zeigen Sie an einem Beispiel, dass anstelle von Teil (ii) nicht behauptet werden kann, dass $T_k \to \mathrm{Id}$ in dem Raum $\mathscr{L}(L^p(\mathbb{R}^n))$ für $k \to \infty$.

Aufgabe 31

[Satz von Toeplitz in Hilberträumen]

Zeigen Sie Satz 1.31 der Vorlesung: Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertaum und $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Dann sind die folgenden Aussagen (i) und (ii) äquivalent:

(i) Die Inverse T^{-1} existiert als Abbildung auf $\mathscr{H}$ und $T^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$.

(ii) Es gibt eine Konstante $d > 0$, so dass $\|Tx\|_{\mathscr{H}} \geq d\|x\|_{\mathscr{H}}$ für alle $x \in \mathscr{H}$, und $\ker(T^*) = \{0\}$, wobei T^* die Adjungierte zu T bezeichnet.

Aufgabe 32

[Charakterisierung von L^p- und Sobolevräumen]

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $p \in [1,\infty]$. Zeigen Sie für Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$:

(i) $f \in L^p(\Omega)$ genau dann, wenn $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und wenn es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, so dass

$$\left| \int_\Omega f(x)\eta(x)\,dx \right| \leq C\|\eta\|_{L^q(\Omega)} \qquad \text{für alle } \ \eta \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1}$$

(Hierbei ist $q \in [1,\infty]$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$ der *zu p konjugierte Exponent* und $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ genau dann, wenn $f \in L^1(K)$ für alle Kompakta $K \subset \Omega$.)

(ii) Für $k \in \mathbb{N}$ und $p \in (1,\infty]$ ist $f \in W^{k,p}(\Omega)$ genau dann, wenn $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und wenn es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, so dass für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leq k$ gilt

$$\left| \int_\Omega f(x)\partial^\alpha\eta(x)\,dx \right| \leq C\|\eta\|_{L^q(\Omega)} \qquad \text{für alle } \ \eta \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2}$$

Hinweis: Für die Beweisrichtung, bei der man (1) *für Teil (i) bzw.* (2) *für Teil (ii) voraussetzt, kann man folgendermaßen vorgehen: Man fasse die jeweilige linke Seite als stetiges lineares Funktional auf dem Raum $C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich der L^q-Norm auf. Dann benutze man ohne Beweis, dass $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^q(\Omega)$ liegt, und setze mit Hilfe von Aufgabe 18 dieses Funktional auf ganz $L^q(\Omega)$ fort. Benutze anschließend ohne Beweis die Tatsache, dass $L^q(\Omega)' \simeq L^p(\Omega)$ (vgl. Beispiel $\boxed{13}$ aus Kapitel 1 der Vorlesung und Bemerkung nach Satz 1.21 von F. Riesz), und nutze schließlich das Fundamentallemma aus Aufgabe 29.*
