Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Alexandra Gilsbach
Jan Knappmann

Übungen zur Vorlesung
Funktionalanalysis
Serie 1 vom 21.10.2015
Abgabedatum: 30.10.2015

Aufgabe 1

[Die vom Skalarprodukt induzierte Norm]

Sei $\mathscr{H}$ ein Prähilbertraum über $\mathbb{C}$ mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}}$. Zeigen Sie:

(i) Das Skalarprodukt induziert mit $\|x\|_{\mathscr{H}} := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ eine Norm auf $\mathscr{H}$, d.h. die Abbildung $\|\cdot\|_{\mathscr{H}} : \mathscr{H} \to \mathbb{R}$ erfüllt die Eigenschaften

- (N1) $\|x\|_{\mathscr{H}} \geq 0 \; \forall\, x \in \mathscr{H}$ mit Gleichheit genau dann, wenn $x = 0$;
- (N2) $\|\alpha x\|_{\mathscr{H}} = |\alpha|\|x\|_{\mathscr{H}} \; \forall\, x \in \mathscr{H}, \alpha \in \mathbb{C}$;
- (N3) $\|x+y\|_{\mathscr{H}} \leq \|x\|_{\mathscr{H}} + \|y\|_{\mathscr{H}} \; \forall\, x,y \in \mathscr{H}$.

(ii) Es gilt die *Parallelogrammidentität*

$$\|x+y\|^2_{\mathscr{H}} + \|x-y\|^2_{\mathscr{H}} = 2\|x\|^2_{\mathscr{H}} + 2\|y\|^2_{\mathscr{H}} \text{ für alle } x,y \in \mathscr{H}.$$

(iii) Es gilt die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|_{\mathscr{H}} \cdot \|y\|_{\mathscr{H}} \text{ für alle } x,y \in \mathscr{H}.$$

Hinweis: Man kann den Beweis der Dreiecksungleichung (N3) *in (i) zunächst zurückstellen und erst (iii) beweisen, bevor man damit dann* (N3) *zeigt.*

Aufgabe 2

[Starke Konvergenz im Prähilbertraum]

Sei $\mathscr{H}$ ein Prähilbertraum und $x, x_n, y, y_n \in \mathscr{H}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(i) Äquivalent sind:

- (a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.
- (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_{\mathscr{H}} = \|x\|_{\mathscr{H}}$ und für alle $y \in \mathscr{H}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle_{\mathscr{H}} = \langle x,y\rangle_{\mathscr{H}}$.

(ii) Für $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle_{\mathscr{H}} = \langle x,y\rangle_{\mathscr{H}}$.

Aufgabe 3

[Folgenraum ℓ^p]

Sei $1 \leq p \leq \infty$ und

$$\begin{aligned} \ell^p &:= \{A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_n \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty\} \text{ für } p \in [1,\infty), \\ \ell^\infty &:= \{A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_n \in \mathbb{R} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty\} \text{ für } p = \infty, \end{aligned}$$

der Raum der *p-summierbaren Folgen.*

(i)* Zeigen Sie, dass $(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p})$ mit der komponentenweise Addition und skalaren Multiplikation und mit $\|A\|_{\ell^p} = \|(a_n)_n\|_{\ell^p} := \left(\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p\right)^{1/p}$ für $p \in [1,\infty)$ und mit $\|A\|_{\ell^\infty} := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ ein Banachraum ist.

(ii) Zeigen Sie, dass ℓ^2 mit dem Skalarprodukt

$$\langle A, B\rangle_{\ell^2} := \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad \text{für } A = (a_n)_n, B = (b_n)_n \in \ell^2$$

ein Hilbertraum über $\mathbb{R}$ ist.

(iii) Geben Sie ein vollständiges Orthonormalsystem (VONS) für ℓ^2 an.

*Hinweis: Aufgaben mit Sternchen * liefern Zusatzpunkte. Sollten Sie den Teil (i)* nicht bearbeiten, so müssen Sie die Vollständigkeit von ℓ^2 in Teil (ii) separat zeigen.*

Aufgabe 4

[Beispiele verschiedener Räume]

(i) Zeigen Sie, dass die *Einheitssphäre* $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ mit der *Winkelmetrik* $d(x,y) := \arccos\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^n}$ ein vollständiger metrischer Raum ist.

(ii) Zeigen Sie, dass für eine beschränkte, zusammenhängende, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ der Funktionenraum $\mathscr{H} := \{f \in C^1(\overline{\Omega}) : f|_{\partial\Omega} = 0\}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle_{\mathscr{H}} := \int_\Omega \langle \nabla f(x), \nabla g(x)\rangle_{\mathbb{R}^n}\, dx$$

ein Prähilbertraum ist.

(iii)* Zeigen Sie, dass der Raum $\mathscr{H}$ aus Teil (ii) mit der durch das Skalarprodukt induzierten Norm kein Hilbertraum ist.
