

Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Alexandra Gilsbach
Jan Knappmann

Übungen zur Vorlesung
Funktionalanalysis
Serie 10 vom 7.1.2016
Abgabedatum: 14.1.2016

Aufgabe 37

[Hahn-Banach für separable Räume]

Beweisen Sie: Sei $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$ ein separabler normierter \mathbb{R} -Vektorraum, $K > 0$ und $p(x) := K\|x\|_{\mathcal{V}}$ für $x \in \mathcal{V}$. Ferner sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ ein Unterraum und $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ linear mit $f \leq p|_{\mathcal{U}}$. Dann existiert eine lineare Abbildung $F: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F|_{\mathcal{U}} = f$ und $F \leq p$ auf \mathcal{V} .

Hinweis: Nutzen Sie sukzessive die konkrete Fortsetzung auf direkte Summen von Unterräumen und anderen Vektorraumelementen so wie zu Beginn des Beweises von Satz 2.1 der Vorlesung (Hahn-Banach).

Aufgabe 38

[Stark und schwach abgeschlossen]

Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum. Zeigen Sie:

- (i) Jede schwach-folgenabgeschlossene Teilmenge $A \subset \mathcal{H}$ ist (stark) abgeschlossen, d.h. abgeschlossen bezüglich der Norm von \mathcal{H} .
- (ii) Nicht jede (stark) abgeschlossene Teilmenge $B \subset \mathcal{H}$ ist schwach-folgenabgeschlossen.
- (iii) Jeder (stark) abgeschlossene Unterraum $U \subset \mathcal{H}$ ist schwach-folgenabgeschlossen.

Aufgabe 39

[Abschluss der Einheitsphäre]

Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum unendlicher Dimension. Zeigen Sie:

- (i) Für jedes $f \in \overline{B_1(0)} \subset \mathcal{H}$ existiert eine Folge $(f_k)_k \subset \partial B_1(0)$, also mit $\|f_k\|_{\mathcal{H}} = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so dass $f_k \rightharpoonup f$ für $k \rightarrow \infty$.
 - (ii) Der Schnitt einer bezüglich der schwachen Konvergenz in \mathcal{H} dichten Teilmenge mit dem abgeschlossenen Einheitsball $\overline{B_1(0)} \subset \mathcal{H}$ ist im Allgemeinen nicht dicht in $\overline{B_1(0)}$ bezüglich schwacher Konvergenz. Eine Teilmenge $A \subset C \subset \mathcal{V}$ eines normierten linearen Raums \mathcal{V} heiÙe hier dicht in C bezüglich der schwachen Konvergenz, wenn für jedes $c \in C$ eine Folge $(a_k)_k \subset A$ existiert, so dass $a_k \rightharpoonup c$ für $k \rightarrow \infty$.
-

Aufgabe 40

[Reflexivität]

Zeigen Sie:

- (i) Für zwei isomorphe Banachräume \mathcal{B} und \mathcal{D} gilt: \mathcal{B} ist genau dann reflexiv, wenn \mathcal{D} reflexiv ist.
 - (ii) Ein Banachraum \mathcal{B} ist genau dann reflexiv, wenn sein Dualraum \mathcal{B}' reflexiv ist.
-