Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Alexandra Gilsbach
Jan Knappmann

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis Serie 7 vom 3.12.2015 Abgabedatum: 10.12.2015

Aufgabe 25

[Sobolevfunktionen II]

(i) Sei $\alpha > 0$ und $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ der offene Einheitsball im $\mathbb{R}^n$. Für welche $p \in [1, \infty]$ ist die Funktion

$$u(x) := \begin{cases} \frac{1}{|x|^\alpha} & \text{für } x \in B_1(0) \setminus \{0\}, \\ 17 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in dem Sobolevraum $W^{1,p}(B_1(0))$?

(ii)* Konstruieren Sie eine $W^{1,p}$-Funktion, die auf jeder offenen Teilmenge von $B_1(0)$ unbeschränkt ist.

Aufgabe 26

[Faltungen]

Für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Weiterhin sei $\eta \in C_0^\infty(B_1(0))$ mit $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\, dx = 1$. Die *Faltung* $f^\varepsilon := \eta_\varepsilon \star f$ einer Funktion $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ mit $\eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\eta(x/\varepsilon)$ sei definiert durch

$$f^\varepsilon(x) := \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy \quad \text{ für } x \in \Omega_\varepsilon.$$

Zeigen Sie:

(i) $f^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$.

(ii) $f^\varepsilon(x) \to f(x)$ für $\mathscr{L}^n$-fast alle $x \in \Omega$.

(iii) Für $f \in C^0(\Omega)$ und eine kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ gilt $\|f^\varepsilon - f\|_{C^0(K)} \to 0$ für $\varepsilon \to 0$.

(iv) Für $1 \le p < \infty$ und $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ gilt $f^\varepsilon \to f$ in $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ für $\varepsilon \to 0$.

(v) Falls $f \in W^{k,p}(\Omega)$ für $p \in [1, \infty)$ und $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \ge 0$, dann gilt $f^\varepsilon \to f$ in $W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ für $\varepsilon \to 0$.

Dabei ist $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ genau dann, wenn $f \in L^p(K)$ für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$, und die Konvergenz in $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ meint Konvergenz in $L^p(K)$ für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$.

Aufgabe 27

[Charakterisierung von $W^{1,1}$ in einer Dimension]

Sei $I \subset \mathbb{R}^1$ ein offenes Intervall. Zeigen Sie:

(i) Für $u \in W^{1,1}(I)$ und $\mathscr{L}^1$-fast alle $a, b \in I$ gilt

$$u(b) - u(a) = \int_a^b u'(t)\, dt.$$

Hierbei ist $W^{1,1}(I)$ der Sobolevraum der L^1-Funktionen mit integrabler schwacher Ableitung u'.

(ii) Gilt für $u, v \in L^1(I)$ die Identität

$$u(b) - u(a) = \int_a^b v(t)\, dt \quad \text{für } \mathscr{L}^1\text{-fast alle } a, b \in I,$$

dann ist $u \in W^{1,1}(I)$ mit schwacher Ableitung $u' = v$.

Hinweis: Benutzen Sie für Teil (i) den Teil (v) der Aufgabe 26, um zunächst mit glatten Funktionen zu rechnen.

Aufgabe 28

[Eigenschaften der Adjungierten]

Seien $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum und $S, T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ stetige lineare Abbildungen mit ihren Adjungierten S^* und T^*. Zeigen Sie:

(i) $(ST)^* = T^* S^*$.

(ii) $(S + T)^* = S^* + T^*$.

(iii) $\ker(T) = (\operatorname{im}(T^*))^\perp$.

(iv) $\overline{\operatorname{im}(T^*)} = (\ker(T))^\perp$.

(v)* Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass $\operatorname{im}(T^*)$ im Allgemeinen eine echte Teilmenge von $(\ker(T))^\perp$ ist.
