

Übungen zur Vorlesung  
Funktionalanalysis  
Serie 8 vom 9.12.2015  
Abgabedatum: 17.12.2015

---

Aufgabe 29

[Fundamentallemmata]

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $g \in L^1(\Omega)$ . Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen.

- (i)  $\int_{\Omega} g(x)\eta(x) dx = 0$  für alle  $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ .
- (ii)  $\int_E g(x) dx = 0$  für alle messbaren beschränkten Mengen  $E$  mit  $\bar{E} \subset \Omega$ .
- (iii)  $g(x) = 0$  für  $\mathcal{L}^n$ -fast alle  $x \in \Omega$ .

*Hinweis: Falten Sie die charakteristischen Funktionen*

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in E \\ 0 & \text{für } x \notin E \end{cases}$$

*mit geeigneten Abschneidefunktionen, vgl. Aufgabe 26.*

---

Aufgabe 30

[Faltungsooperatoren]

Es sei  $\eta \in C_0^\infty(B_1(0))$  mit  $\eta \geq 0$  und  $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = 1$ . Die *Faltung*  $f^\varepsilon := \eta_\varepsilon \star f$  einer Funktion  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $\eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \eta(x/\varepsilon)$  ist definiert durch (vgl. Aufgabe 26)

$$f^\varepsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)f(y) dy \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie für  $\varepsilon = \varepsilon_k := 1/k$ :

- (i)  $T_k f := f^{\varepsilon_k}$  definiert einen linearen Operator  $T_k \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n))$  für  $p \in [1, \infty]$  mit  $\|T_k\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n))} \leq 1$ .
- (ii) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 26, dass für  $p \in [1, \infty)$  und  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

$$(T_k - \text{Id})f \rightarrow 0 \text{ in } L^p(\mathbb{R}^n) \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

- (iii)\* Zeigen Sie an einem Beispiel, dass anstelle von Teil (ii) nicht behauptet werden kann, dass  $T_k \rightarrow \text{Id}$  in dem Raum  $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n))$  für  $k \rightarrow \infty$ .
-

## Aufgabe 31

### [Satz von Toeplitz in Hilberträumen]

Zeigen Sie Satz 1.31 der Vorlesung: Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Dann sind die folgenden Aussagen (i) und (ii) äquivalent:

- (i) Die Inverse  $T^{-1}$  existiert als Abbildung auf  $\mathcal{H}$  und  $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ .
- (ii) Es gibt eine Konstante  $d > 0$ , so dass  $\|Tx\|_{\mathcal{H}} \geq d\|x\|_{\mathcal{H}}$  für alle  $x \in \mathcal{H}$ , und  $\ker(T^*) = \{0\}$ , wobei  $T^*$  die Adjungierte zu  $T$  bezeichnet.

---

## Aufgabe 32

### [Charakterisierung von $L^p$ - und Sobolevräumen]

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $p \in [1, \infty]$ . Zeigen Sie für Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ :

- (i)  $f \in L^p(\Omega)$  genau dann, wenn  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  und wenn es eine Konstante  $C \geq 0$  gibt, so dass

$$\left| \int_{\Omega} f(x)\eta(x) dx \right| \leq C\|\eta\|_{L^q(\Omega)} \quad \text{für alle } \eta \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1)$$

(Hierbei ist  $q \in [1, \infty]$  mit  $p^{-1} + q^{-1} = 1$  der zu  $p$  konjugierte Exponent und  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  genau dann, wenn  $f \in L^1(K)$  für alle Kompakta  $K \subset \Omega$ .)

- (ii) Für  $k \in \mathbb{N}$  und  $p \in (1, \infty]$  ist  $f \in W^{k,p}(\Omega)$  genau dann, wenn  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  und wenn es eine Konstante  $C \geq 0$  gibt, so dass für alle Multiindizes  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq k$  gilt

$$\left| \int_{\Omega} f(x)\partial^\alpha \eta(x) dx \right| \leq C\|\eta\|_{L^q(\Omega)} \quad \text{für alle } \eta \in C_0^\infty(\Omega). \quad (2)$$

*Hinweis: Für die Beweisrichtung, bei der man (1) für Teil (i) bzw. (2) für Teil (ii) voraussetzt, kann man folgendermaßen vorgehen: Man fasse die jeweilige linke Seite als stetiges lineares Funktional auf dem Raum  $C_0^\infty(\Omega)$  bezüglich der  $L^q$ -Norm auf. Dann benutze man ohne Beweis, dass  $C_0^\infty(\Omega)$  dicht in  $L^q(\Omega)$  liegt, und setze mit Hilfe von Aufgabe 18 dieses Funktional auf ganz  $L^q(\Omega)$  fort. Benutze anschließend ohne Beweis die Tatsache, dass  $L^q(\Omega)' \simeq L^p(\Omega)$  (vgl. Beispiel 13 aus Kapitel 1 der Vorlesung und Bemerkung nach Satz 1.21 von F. Riesz), und nutze schließlich das Fundamentallema aus Aufgabe 29.*

---