Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Alexandra Gilsbach
Jan Knappmann

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis Serie 9 vom 16.12.2015 Abgabedatum: 7.1.2016

Aufgabe 33

[Fortsetzung von Funktionalen]

Sei $(\mathscr{V}, \|\cdot\|_{\mathscr{V}})$ ein normierter linearer Raum und $v_0 \in \mathscr{V}$. Zeigen Sie:

(i) Falls $v_0 \neq 0$, dann existiert eine stetiges lineares Funktional $l_0 \in \mathscr{V}'$, so dass $\|l_0\|_{\mathscr{V}'} = 1$ und $l_0(v_0) = \|v_0\|_{\mathscr{V}}$.

(ii) Ist $l(v_0) = 0$ für alle $l \in \mathscr{V}'$, dann ist $v_0 = 0$.

(iii) Durch die Zuordnung $T(l) := l(v_0)$ für $l \in \mathscr{V}'$ ist eine lineare Abbildung $T : \mathscr{V}' \to \mathbb{K}$ definiert, und es gilt $T \in \mathscr{L}(\mathscr{V}', \mathbb{K}) = (\mathscr{V}')' =: \mathscr{V}''$ mit $\|T\|_{\mathscr{V}''} = \|v_0\|_{\mathscr{V}}$. (Der Raum $\mathscr{V}''$ wird häufig als der *Bidualraum* von $\mathscr{V}$ bezeichnet.)

Aufgabe 34

[Banach-Steinhaus und Folgerung]

Sei $(\mathscr{B}, \|\cdot\|_{\mathscr{B}})$ ein Banachraum und $(\mathscr{V}, \|\cdot\|_{\mathscr{V}})$ ein linearer normierter Raum und $(T_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathscr{V})$ eine Folge von linearen und beschränkten Abbildungen von $\mathscr{B}$ nach $\mathscr{V}$.

(i) Zeigen Sie: Falls es eine Abbildung $T : \mathscr{B} \to \mathscr{V}$ gibt, so dass $\lim_{k\to\infty} T_k(x) = T(x)$ für alle $x \in \mathscr{B}$, dann gilt $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|T_k\|_{\mathscr{L}(\mathscr{B},\mathscr{V})} < \infty$ und $T \in \mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathscr{V})$ mit der Abschätzung

$$\|T\|_{\mathscr{L}(\mathscr{B},\mathscr{V})} \leq \liminf_{k\to\infty} \|T_k\|_{\mathscr{L}(\mathscr{B},\mathscr{V})}.$$

(ii)* Beweisen Sie *ohne* Satz 2.5 (Bairescher Kategoriensatz) und *ohne* Satz 2.6 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit) die folgende Version des Satzes von Banach-Steinhaus: Falls $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|T_k(x)\|_{\mathscr{V}} < \infty$ für alle $x \in \mathscr{B}$, dann ist $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|T_k\|_{\mathscr{L}(\mathscr{B},\mathscr{V})} < \infty$.

Hinweis: Argumentieren Sie indirekt für Teil (ii), indem Sie annehmen, dass die Normen $\|T_k\|_{\mathscr{L}(\mathscr{B},\mathscr{V})}$ für eine Teilfolge genügend schnell explodieren, sodass man Punkte v_k beliebig kleiner Norm findet, so dass die Werte $\|T_k(v_k)\|_{\mathscr{V}}/\|v_k\|_{\mathscr{B}}$ ebenfalls in dieser Größenordnung explodieren. Starten Sie mit $u_0 := 0$ und konstruieren Sie induktiv eine Cauchyfolge durch $u_k := u_{k-1} + \pm v_k$, an deren Grenzwert u dann die Werte $\|T_k(u)\|_{\mathscr{V}}$ im Widerspruch zur Voraussetzung explodieren.*

Aufgabe 35

[Schwache Konvergenz]

Zeigen Sie:

(i) Sei $(\mathscr{B}, \|\cdot\|_{\mathscr{B}})$ ein Banachraum. Es sei $\beta : \mathscr{B} \times \mathscr{B} \to \mathbb{R}$ eine symmetrische, positiv-semidefinite und stetige Bilinearform, dann gilt für eine schwach in $\mathscr{B}$ konvergente Folge $x_k \rightharpoonup x$ die Ungleichung

$$\beta(x,x) \leq \liminf_{k\to\infty} \beta(x_k, x_k).$$

(Man sagt auch, β ist *folgenunterhalbstetig bzgl. der schwachen Konvergenz.*)

(ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$ und $p \in [1,\infty]$. Dann gilt für Sobolevfunktionen $f_l, f \in W^{k,p}(\Omega)$: $f_l \rightharpoonup f$ in $W^{k,p}(\Omega)$ für $l \to \infty$ genau dann, wenn die schwachen Ableitungen $\partial^\alpha f_l$ schwach gegen $\partial^\alpha f$ in $L^p(\Omega)$ für $l \to \infty$ für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leq k$ konvergieren.

Hinweis: Für die Beweisrichtung in Teil (ii), bei der man die schwache Konvergenz der schwachen Ableitungen in $L^p(\Omega)$ voraussetzt, kann man jeder Funktion $g \in W^{k,p}(\Omega)$ den Vektor aller schwachen Ableitungen $\partial^\alpha g$ zuordnen, und man kann zeigen, dass diese Abbildung in den Raum $L^p(\Omega, \mathbb{R}^L)$ (L=Zahl aller schwachen Ableitungen) linear und stetig ist und eine stetige Inverse besitzt. Lineare Funktionale auf $W^{k,p}(\Omega)$ können mit dieser Abbildung in lineare Funktionale auf diesem Bildraum verwandelt werden und mit dem Satz von Hahn-Banach auf ganz $L^p(\Omega, \mathbb{R}^L)$ fortgesetzt werden, um die vorausgesetzte schwache Konvergenz der schwachen Ableitungen ins Spiel zu bringen.

Aufgabe 36

[Schwacher und punktweiser Grenzwert in L^p]

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes und beschränktes Gebiet und $p \in [1,\infty]$ und $f_k, f, g \in L^p(\Omega)$. Beweisen Sie: Falls $f_k \rightharpoonup f$ in $L^p(\Omega)$ und $f_k(x) \to g(x)$ für $\mathscr{L}^n$-fast alle $x \in \Omega$, dann ist $g(x) = f(x)$ für $\mathscr{L}^n$-fast alle $x \in \Omega$.

Hinweis: Führen Sie die punktweise Konvergenz fast überall mit Hilfe des Satzes von Egoroff auf eine gleichmäßige Konvergenz auf einer großen Teilmenge von Ω zurück.
