

Übungen zur Vorlesung
Funktionalanalysis
Serie 1 vom 18.10.2023
Abgabedatum: 31.10.2023

Aufgabe 1

[Die vom Skalarprodukt induzierte Norm]

Sei \mathcal{H} ein Prähilbertraum über \mathbb{C} mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$. Zeigen Sie:

(i) Das Skalarprodukt induziert mit $\|x\|_{\mathcal{H}} := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm auf \mathcal{H} , d.h. die Abbildung $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt die Eigenschaften

(N1) $\|x\|_{\mathcal{H}} \geq 0 \forall x \in \mathcal{H}$ mit Gleichheit genau dann, wenn $x = 0$;

(N2) $\|\alpha x\|_{\mathcal{H}} = |\alpha| \|x\|_{\mathcal{H}} \forall x \in \mathcal{H}, \alpha \in \mathbb{C}$;

(N3) $\|x + y\|_{\mathcal{H}} \leq \|x\|_{\mathcal{H}} + \|y\|_{\mathcal{H}} \forall x, y \in \mathcal{H}$.

(ii) Es gilt die *Parallelogrammidentität*

$$\|x + y\|_{\mathcal{H}}^2 + \|x - y\|_{\mathcal{H}}^2 = 2\|x\|_{\mathcal{H}}^2 + 2\|y\|_{\mathcal{H}}^2 \text{ für alle } x, y \in \mathcal{H}.$$

(iii) Es gilt die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_{\mathcal{H}} \cdot \|y\|_{\mathcal{H}} \text{ für alle } x, y \in \mathcal{H}.$$

Hinweis: Man kann den Beweis der Dreiecksungleichung (N3) in (i) zunächst zurückstellen und erst (iii) beweisen, bevor man damit dann (N3) zeigt.

Aufgabe 2

[Starke Konvergenz im Prähilbertraum]

Sei \mathcal{H} ein Prähilbertraum und $x, x_n, y, y_n \in \mathcal{H}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(i) Äquivalent sind:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{\mathcal{H}} = \|x\|_{\mathcal{H}}$ und für alle $y \in \mathcal{H}$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle_{\mathcal{H}} = \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}}$.

(ii) Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, dann gilt auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle_{\mathcal{H}} = \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}}$.

Aufgabe 3

[Folgenraum ℓ^p]

Sei $1 \leq p \leq \infty$ und

$$\ell^p := \{A = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, a_n \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty\} \text{ für } p \in [1, \infty),$$
$$\ell^\infty := \{A = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, a_n \in \mathbb{R} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty\} \text{ für } p = \infty,$$

der Raum der p -summierbaren Folgen.

- (i)* Zeigen Sie, dass $(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p})$ mit der komponentenweise Addition und skalaren Multiplikation und mit $\|A\|_{\ell^p} = \|(a_n)_n\|_{\ell^p} := (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p)^{1/p}$ für $p \in [1, \infty)$ und mit $\|A\|_{\ell^\infty} := \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ ein Banachraum ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass ℓ^2 mit dem Skalarprodukt

$$\langle A, B \rangle_{\ell^2} := \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad \text{für } A = (a_n)_n, B = (b_n)_n \in \ell^2$$

ein Hilbertraum über \mathbb{R} ist.

- (iii) Geben Sie ein vollständiges Orthonormalsystem (VONS) für ℓ^2 an.

*Hinweis: Aufgaben mit Sternchen * liefern Zusatzpunkte. Sollten Sie den Teil (i)* nicht bearbeiten, so müssen Sie die Vollständigkeit von ℓ^2 in Teil (ii) separat zeigen.*

Aufgabe 4

[Beispiele verschiedener Räume]

- (i) Zeigen Sie, dass die *Einheitssphäre* $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ mit der *Winkelmetrik* $d(x, y) := \arccos \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^n}$ ein vollständiger metrischer Raum ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass für eine beschränkte, zusammenhängende, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ der Funktionenraum $\mathcal{H} := \{f \in C^1(\overline{\Omega}) : f|_{\partial\Omega} = 0\}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} := \int_{\Omega} \langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle_{\mathbb{R}^n} dx$$

ein Prähilbertraum ist.

- (iii)* Zeigen Sie, dass der Raum \mathcal{H} aus Teil (ii) mit der durch das Skalarprodukt induzierten Norm kein Hilbertraum ist.
-