Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Axel Wings

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis Serie 10 vom 21.12.2023 Abgabedatum: 16.1.2023

Aufgabe 37

[Hahn-Banach für separable Räume]

Beweisen Sie ohne Benutzung des Lemmas von Zorn: Sei $(\mathscr{V}, \|.\|_{\mathscr{V}})$ ein separabler normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, $K > 0$ und $p(x) := K\|x\|_{\mathscr{V}}$ für $x \in \mathscr{V}$. Ferner sei $\mathscr{U} \subset \mathscr{V}$ ein Unterraum und $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ linear mit $f \leq p|_{\mathscr{U}}$. Dann existiert eine lineare Abbildung $F : \mathscr{V} \to \mathbb{R}$ mit $F|_{\mathscr{U}} = f$ und $F \leq p$ auf $\mathscr{V}$.

Hinweis: Nutzen Sie sukzessive die konkrete Fortsetzung auf direkte Summen von Unterräumen und anderen Vektorraumelementen so wie zu Beginn des Beweises von Satz 2.1 der Vorlesung (Hahn-Banach).

Aufgabe 38

[Stark und schwach abgeschlossen]

Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertaum. Zeigen Sie:

(i) Jede schwach-folgenabgeschlossene Teilmenge $A \subset \mathscr{H}$ ist (stark) abgeschlossen, d.h. abgeschlossen bezüglich der Norm von $\mathscr{H}$.

(ii) Nicht jede (stark) abgeschlossene Teilmenge $B \subset \mathscr{H}$ ist schwach-folgenabgeschlossen.

(iii) Jeder (stark) abgeschlossene Unterraum $U \subset \mathscr{H}$ ist schwach-folgenabgeschlossen.

Aufgabe 39

[Abschluss der Einheitssphäre]

Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertaum unendlicher Dimension. Zeigen Sie:

(i) Für jedes $f \in \overline{B_1(0)} \subset \mathscr{H}$ existiert eine Folge $(f_k)_k \subset \partial B_1(0)$, also mit $\|f_k\|_{\mathscr{H}} = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$, sodass $f_k \rightharpoonup f$ für $k \to \infty$.

(ii) Der Schnitt einer bezüglich der schwachen Konvergenz in $\mathscr{H}$ dichten Teilmenge mit dem abgeschlossenen Einheitsball $\overline{B_1(0)} \subset \mathscr{H}$ ist im Allgemeinen nicht dicht in $\overline{B_1(0)}$ bezüglich schwacher Konvergenz. Eine Teilmenge $A \subset C \subset \mathscr{V}$ eines normierten linearen Raums $\mathscr{V}$ heiße hier dicht in C bezüglich der schwachen Konvergenz, wenn für jedes $c \in C$ eine Folge $(a_k)_k \subset A$ existiert, sodass $a_k \rightharpoonup c$ für $k \to \infty$.

Aufgabe 40

[Reflexivität]

Zeigen Sie:

(i) Für zwei isomorphe Banachräume $\mathscr{B}$ und $\mathscr{D}$ gilt: $\mathscr{B}$ ist genau dann reflexiv, wenn $\mathscr{D}$ reflexiv ist.

(ii) Ein Banachraum $\mathscr{B}$ ist genau dann reflexiv, wenn sein Dualraum $\mathscr{B}'$ reflexiv ist.
