

Übungen zur Vorlesung
Funktionalanalysis
Serie 2 vom 28.10.2023
Abgabedatum: 7.11.2023

Aufgabe 5

[Metrische Räume]

- (i) Sei $\mathbb{C}^{\mathbb{N}} := \{x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} : x_k \in \mathbb{C} \text{ für } k \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller komplexen Folgen. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ mit der von der Fréchet-Metrik

$$\rho(x) := \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} \frac{|x_k|}{1 + |x_k|} \quad \text{für } x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$$

induzierten Metrik $d(x, y) := \rho(x - y)$ ein vollständiger metrischer Raum ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Vollständigkeit von \mathbb{C} für den Beweis der Vollständigkeit von $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

- (ii) Sei (\mathcal{M}, d) ein metrischer Raum und \mathcal{A} die Menge aller nichtleeren, abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen von \mathcal{M} . Dabei heißt eine Menge $A \subset \mathcal{M}$ beschränkt, wenn es einen Punkt $x_0 \in \mathcal{M}$ und eine Zahl $R > 0$ gibt, so dass $d(x_0, a) \leq R$ für alle $a \in A$. Der Hausdorff-Abstand $\text{dist}_{\mathcal{H}}(A, B)$ zweier Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ ist definiert durch

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(A, B) := \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B_{\varepsilon}(B) \text{ und } B \subset B_{\varepsilon}(A)\},$$

wobei $B_{\varepsilon}(C) := \{x \in \mathcal{M} : \text{dist}(x, C) := \inf_{c \in C} d(x, c) < \varepsilon\}$ die ε -Umgebung einer Menge $C \subset \mathcal{M}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{A}, \text{dist}_{\mathcal{H}})$ ein metrischer Raum ist.

Aufgabe 6

[Vollständigkeit]

Sei $\text{Pol}(n) := \{p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : p \text{ ein Polynom vom Grad höchstens } n\}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\mathcal{P} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Pol}(n)$$

mit der Supremumsnorm $\|f\|_{C^0([0,1])} := \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ ein normierter aber *nicht* vollständiger Raum ist.

Aufgabe 7

[Separabilität]

- (i) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge. Zeigen Sie, dass der Funktionenraum

$$(C^0(K), \|\cdot\|_{C^0(K)})$$

der auf K stetigen reellwertigen Funktionen zusammen mit der Supremumsnorm $\|f\|_{C^0(K)} := \sup_{x \in K} |f(x)|$ separabel ist.

- (ii) Zeigen Sie, dass die p -summierbaren Folgenräume (vgl. Aufgabe 3) ℓ^p für $p \in [1, \infty)$ separabel sind, nicht aber für $p = \infty$.

Aufgabe 8

[Hölderräume]

Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ definiert man zu $\alpha \in (0, 1]$ die *Hölderkonstante*

$$\text{Höl}_{\alpha, A} f := \sup_{\substack{x, y \in A \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \in [0, \infty].$$

(Für $\alpha = 1$ heißt die Hölderkonstante auch *Lipschitzkonstante*, und man schreibt dann auch $\text{Höl}_{1, A} f =: \text{Lip}_A f$.) Zeigen Sie, dass für eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ die zugehörigen *Hölderräume*

$$C^{0, \alpha}(K) := \{f \in C^0(K) : \text{Höl}_{\alpha, K} f < \infty\}$$

bezüglich der *Höldernorm*

$$\|f\|_{C^{0, \alpha}(K)} := \|f\|_{C^0(K)} + \text{Höl}_{\alpha, K} f$$

Banachräume sind.
