Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Axel Wings

Übungen zur Vorlesung
Funktionalanalysis
Serie 3 vom 3.11.2023
Abgabedatum: 14.11.2023

Aufgabe 9

[Orthogonalsystem und Span]

(i) Auf dem offenen Einheitsball $B_1(0) \subset \mathbb{C}$ in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ betrachte die Funktionen $e_k : B_1(0) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^k$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$. Zeigen Sie, dass $\{e_0, e_1, \ldots\}$ ein *Orthogonalsystem* im Raum $L^2(B_1(0), \mathbb{C})$ der quadratintegrablen komplexwertigen Funktionen auf $B_1(0)$ ist und berechnen Sie $\|e_k\|_{L^2(B_1(0),\mathbb{C})}$. (Ein Orthogonalsystem besteht aus zueinander orthogonalen Vektoren, die aber nicht notwendig auf 1 normiert sind.)

(ii)* Sei ℓ^2 der Raum der *komplexen* quadratsummierbaren Zahlenfolgen mit dem Skalarprodukt

$$\langle A, B \rangle_{\ell^2} := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \overline{b_k} \quad \text{für } A = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}, B = (b_k)_{k\in\mathbb{N}},\, a_k, b_k \in \mathbb{C}.$$

Fixiere eine Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| \in (0,1)$ und setze für $l \in \mathbb{N}$

$$f_l := (1, \alpha^l, \alpha^{2l}, \alpha^{3l}, \ldots).$$

Bestimmen Sie den Abschluss von $\operatorname{span}\{f_1, f_2, f_3, \ldots\}$ in ℓ^2, also den Abschluss der Menge aller Linearkombinationen der f_l, $l \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 10

[Offenes Inneres und Abschluss]

Berechnen Sie das offene Innere $\operatorname{int}(A)$ und den Abschluss $\overline{A}$ der Menge

$$A := \{f \in L^1((-1,1)) : f > 0\ \mathscr{L}^1\text{-fast überall}\}.$$

Aufgabe 11

[Orthogonales Komplement]

(i) Beweisen Sie: Für einen Unterraum $\mathscr{A}$ eines Hilbertraums $\mathscr{H}$ gilt

$$\mathscr{A}^\perp = (\overline{\mathscr{A}})^\perp \text{ und } (\mathscr{A}^\perp)^\perp = \overline{\mathscr{A}}.$$

(ii) Zeigen Sie die Äquivalenz

$$\mathscr{A} \text{ liegt dicht in } \mathscr{H} \Leftrightarrow \mathscr{A}^\perp = \{0\}.$$

(iii) Welche der Aussagen in (i) und (ii) gelten auch in Prähilberträumen?

Hierbei bezeichnet für eine Teilmenge B eines Prähilbertaumes $\mathscr{H}$ mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{H}}$ die Menge

$$B^\perp := \{h \in \mathscr{H} : \langle h, b \rangle_{\mathscr{H}} = 0 \text{ für alle } b \in B\}$$

das *orthogonale Komplement von B*.

Aufgabe 12

[Projektionssatz auf konvexe Mengen]

Eine Teilmenge C eines linearen Raums heißt *konvex*, wenn mit je zwei Punkten $x, y \in C$ auch alle *Konvexkombinationen* $tx + (1-t)y$ für $t \in [0,1]$ in C enthalten sind.

(i) Zeigen Sie: Sei $C \subset \mathscr{H}$ eine konvexe, nichtleere und abgeschlossene Teilmenge des Hilbertraums $\mathscr{H}$. Dann gibt es zu jedem $f \in \mathscr{H}$ genau ein $c \in C$, so dass

$$\operatorname{dist}(f, C) = \|f - c\|_{\mathscr{H}}.$$

Man nennt $P(f) := c$ dann auch die *orthogonale Projektion* von f auf C.

(ii) Zeigen Sie nun auch, dass die orthogonale Projektion $P(f)$ durch die folgende Ungleichung charakterisiert ist, dass diese Ungleichung also ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die orthogonale Projektion $P(f) \in C$ liefert:

$$\operatorname{Re} \langle f - P(f), \tilde{c} - P(f) \rangle_{\mathscr{H}} \leq 0 \qquad \text{für alle } \tilde{c} \in C.$$
