

Übungen zur Vorlesung  
Funktionalanalysis  
Serie 5 vom 16.11.2023  
Abgabedatum: 28.11.2023

---

Aufgabe 17

**[Nichtstetige lineare Abbildung]**

Zeigen Sie, dass der Differentialoperator  $T : C^1([-2, 2]) \rightarrow L^2((-2, 2))$  definiert durch  $Tf(x) := f'(x)$ ,  $x \in [-2, 2]$  für  $f \in C^1([-2, 2])$  zwar linear, aber nicht stetig ist (bezüglich der  $L^2$ -Norm in Bild- und Urbildraum).

*Hinweis: Sie können zum Beispiel eine Funktion  $\varphi \in C_0^\infty([-2, 2])$  mit  $\varphi(x) = 0$  für  $|x| \geq 1$  geeignet skalieren, um eine auf Eins normierte Funktionenfolge zu konstruieren, entlang derer die Bilder dieser Folge beliebig große Normen erreichen. Sie können die Existenz einer solchen Funktion  $\varphi$  ohne Beweis annehmen.*

---

Aufgabe 18

**[Fortsetzung stetiger Abbildungen]**

Zeigen Sie:

- (i) Sei  $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$  ein metrischer Raum mit Metrik  $d_{\mathcal{M}}$  und  $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$  eine dichte Teilmenge, sowie  $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$  ein vollständiger metrischer Raum mit Metrik  $d_{\mathcal{N}}$ . Dann besitzt jede gleichmäßig stetige Funktion  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{N}$  genau eine gleichmäßig stetige Fortsetzung  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ .
- (ii) Seien  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  normierte lineare Räume,  $\mathcal{W}$  sei vollständig,  $\mathcal{Z} \subset \mathcal{V}$  ein dichter Unterraum von  $\mathcal{V}$  und  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}, \mathcal{W})$  ein stetiger linearer Operator. Dann gibt es genau eine stetige Fortsetzung  $\tilde{T}$  von  $T$  auf  $\mathcal{V}$ , also  $\tilde{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  mit  $\tilde{T}|_{\mathcal{Z}} = T$ .
- (iii) Seien  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  normierte lineare Räume,  $\mathcal{W}$  sei vollständig und  $\mathcal{D} \subset \mathcal{V}$  sei eine dichte Teilmenge. Falls für eine beschränkte Folge  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  und für jedes  $v \in \mathcal{D}$  der Grenzwert  $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k v$  existiert, so existiert auch

$$Tv := \lim_{k \rightarrow \infty} T_k v \quad \text{für alle } v \in \mathcal{V}, \quad (1)$$

und es ist  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ .

*Hinweis: Machen Sie sich zunächst klar, dass man den punktweisen Grenzwert nicht nur auf  $\mathcal{D}$ , sondern auch auf dessen span erhält, und dass diese Fortsetzung bereits linear und stetig ist. Dann benutzen Sie Teil (ii) für die Fortsetzung auf den Ganzraum und beweisen damit abschließend (1).*

## Aufgabe 19

### [Dualraum und Satz von F. Riesz]

- (i) Sei  $T : C^0([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  und paarweise verschiedenen Stützstellen  $t_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, m$ , definiert durch

$$Tf := \sum_{i=1}^m \alpha_i f(t_i).$$

Zeigen Sie, dass  $T \in (C^0([0, 1]))' = \mathcal{L}(C^0([0, 1]), \mathbb{R})$ , und berechnen Sie die Dualraumnorm  $\|T\|_{(C^0([0, 1]))'}$  =  $\|T\|_{\mathcal{L}(C^0([0, 1]), \mathbb{R})}$ . Hierbei sei  $C^0([0, 1])$  mit der Supremumsnorm ausgestattet.

- (ii) Sei  $T : C^0([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  und paarweise verschiedenen Stützstellen  $t_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, m$ , definiert durch

$$Tf := \int_0^1 f(t) dt - \sum_{i=1}^m \alpha_i f(t_i).$$

Zeigen Sie, dass  $T \in (C^0([0, 1]))' = \mathcal{L}(C^0([0, 1]), \mathbb{R})$ , und berechnen Sie die Dualraumnorm  $\|T\|_{(C^0([0, 1]))'}$  =  $\|T\|_{\mathcal{L}(C^0([0, 1]), \mathbb{R})}$ . Wie in Teil (i) sei  $C^0([0, 1])$  mit der Supremumsnorm ausgestattet.

- (iii)\* Sei  $\mathcal{H}$  ein separabler Hilbertraum mit einem vollständigen Orthonormalsystem (VONS)  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset \mathcal{H}$ . Beweisen Sie den Riesz'schen Darstellungssatz unter Benutzung dieses VONS, indem Sie zu einem beliebigen Dualraumelement  $T \in \mathcal{H}'$  das gesuchte Element  $g \in \mathcal{H}$  mit  $Tf = \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}}$  in Termen des VONS darstellen und die Konvergenz dieser Darstellung beweisen.

## Aufgabe 20

### [Eigenwertproblem für Integraloperator]

Sei  $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ , d.h.

$$\|K\|_{L^2(\Omega \times \Omega)}^2 := \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} |K(x, y)|^2 dy \right) dx < \infty,$$

und sei  $f \in L^2(\Omega)$ , wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge ist. Zeigen Sie, dass für  $\lambda \in (\|K\|_{L^2(\Omega \times \Omega)}, \infty)$  genau eine Lösung  $u \in L^2(\Omega)$  der Integralgleichung

$$\int_{\Omega} K(x, y)u(y) dy = \lambda u(x) + f(x) \quad \text{für } \mathcal{L}^n\text{-fast alle } x \in \Omega$$

existiert.

*Hinweis: Weisen Sie die Voraussetzungen zum Satz von Lax-Milgram in der Variante für koerzive Operatoren nach. Beachten Sie bei Ihrer Argumentation die korrekte Anwendung des Satzes von Fubini.*