Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Axel Wings

Übungen zur Vorlesung
Funktionalanalysis
Serie 6 vom 24.11.2023
Abgabedatum: 5.12.2023

Aufgabe 21

[Heisenberg Unschärferelation]

Beweisen Sie: Für einen normierten linearen Raum $\mathscr{V} \neq \{0\}$ und zwei lineare Abbildungen $P, Q : \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ mit der Eigenschaft $PQ - QP = \mathrm{Id}_{\mathscr{V}}$ gilt: Die Abbildungen P und Q können nicht beide stetig sein.

Hinweis: Berechnen Sie $PQ^n - Q^nP$ und schätzen Sie Operatornormen ab.

Aufgabe 22

[Störungen der Identität]

Zeigen Sie:

(i) Für einen Banachraum $\mathscr{V}$ und eine Abbildung $T \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$ mit

$$\limsup_{m\to\infty} \|T^m\|_{\mathscr{L}(\mathscr{V})}^{1/m} < 1 \tag{1}$$

gilt: Die *Störung der Identität* $\mathrm{Id}_{\mathscr{V}} - T$ besitzt eine Inverse $(\mathrm{Id}_{\mathscr{V}} - T)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$ mit der Darstellung

$$(\mathrm{Id}_{\mathscr{V}} - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k. \tag{2}$$

(ii) Für zwei Banachräume $\mathscr{V} \neq \{0\}, \mathscr{W} \neq \{0\}$ und $T, S \in \mathscr{L}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ gilt: Ist T invertierbar mit einer stetigen Inversen T^{-1} und ist $\|T - S\|_{\mathscr{L}(\mathscr{V},\mathscr{W})} < \|T^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{V},\mathscr{W})}^{-1}$, dann besitzt auch S eine stetige Inverse.

(iii)* Konstruieren Sie ein Beispiel, welches zeigt, dass man in Teil (i) auf die Vollständigkeit von $\mathscr{V}$ im Allgemeinen *nicht* verzichten kann.

Hinweis: Benutzen Sie (1)*, um für Teil (i) zu zeigen, dass die Partialsummen der rechten Seite von* (2) *eine Cauchy-Folge in $\mathscr{L}(\mathscr{V})$ bilden. Überprüfen Sie abschließend für den Grenzwert die Eigenschaften der (beidseitig) inversen Abbildung. Teil (ii) lässt sich auf Teil (i) zurückführen.*

Aufgabe 23

[Sobolevfunktionen I]

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad u(x) := |x|$$

in $W^{1,\infty}(B_1(0))$ liegt.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad u(x) := \begin{cases} \log\log \frac{1}{|x|} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

für $0 < R < 1$ in $W^{1,2}(B_R(0))$ liegt.

(iii) Ist die *Heavyside-Funktion*

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

eine Sobolevfunktion? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 24

[Sobolevräume sind Banachräume]

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, $p \in [1, \infty]$ die Sobolevräume $W^{k,p}(\Omega)$ Banachräume bezüglich der Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

sind.

Hinweis: Benutzen Sie die Minkowski-Ungleichung

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)} \quad \textit{für alle } \ f, g \in L^p(\Omega)$$

ohne Beweis.
