

Übungen zur Vorlesung
Funktionalanalysis
Serie 7 vom 1.12.2023
Abgabedatum: 12.12.2023

Aufgabe 25

[Sobolevfunktionen II]

- (i) Es sei $n \in \mathbb{N}$, und $B_1(0)$ bezeichne den offenen Einheitsball im \mathbb{R}^n . Für welche $\alpha > 0$, $p \in [1, \infty]$ ist die Funktion $u : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(x) := \begin{cases} \frac{1}{|x|^\alpha} & \text{für } x \in B_1(0) \setminus \{0\}, \\ 17 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in dem Sobolevraum $W^{1,p}(B_1(0))$?

- (ii)* Konstruieren Sie eine $W^{1,p}$ -Funktion, die auf jeder offenen Teilmenge von $B_1(0)$ unbeschränkt ist. Dabei können Sie $p \in [1, \infty]$ und $n \in \mathbb{N}$ frei wählen.

Aufgabe 26

[Faltungen]

Für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Weiterhin sei $\eta \in C_0^\infty(B_1(0))$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = 1$. Die *Faltung* $f^\varepsilon := \eta_\varepsilon \star f$ einer Funktion $f \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ mit $\eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \eta(x/\varepsilon)$ sei definiert durch

$$f^\varepsilon(x) := \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x-y) f(y) dy \quad \text{für } x \in \Omega_\varepsilon.$$

Zeigen Sie:

- (i) $f^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$.
- (ii) $f^\varepsilon(x) \rightarrow f(x)$ für \mathcal{L}^n -fast alle $x \in \Omega$.
- (iii) Falls $f \in C^0(\Omega)$, dann gilt für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ $\|f^\varepsilon - f\|_{C^0(K)} \rightarrow 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$.
- (iv) Falls $p \in [1, \infty)$ und $f \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$, dann gilt $f^\varepsilon \rightarrow f$ in $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$.
- (v) Falls $f \in W^{k,p}(\Omega)$ für $p \in [1, \infty)$ und $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \geq 0$, dann gilt $f^\varepsilon \rightarrow f$ in $W_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$.

Dabei ist $f \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ genau dann, wenn $f \in L^p(K)$ für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$, und die Konvergenz in $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ meint Konvergenz in $L^p(K)$ für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$.

Aufgabe 27

[Charakterisierung von $W^{1,1}$ in einer Dimension]

Sei $I \subset \mathbb{R}^1$ ein offenes Intervall. Zeigen Sie:

- (i) Für $u \in W^{1,1}(I)$ und \mathcal{L}^1 -fast alle $a, b \in I$ gilt

$$u(b) - u(a) = \int_a^b u'(t) dt.$$

Hierbei ist $W^{1,1}(I)$ der Sobolevraum der L^1 -Funktionen mit integrierbarer schwacher Ableitung u' .

- (ii) Gilt für $u, v \in L^1(I)$ die Identität

$$u(b) - u(a) = \int_a^b v(t) dt \quad \text{für } \mathcal{L}^1\text{-fast alle } a, b \in I,$$

dann ist $u \in W^{1,1}(I)$ mit schwacher Ableitung $u' = v$.

Hinweis: Benutzen Sie für Teil (i) den Teil (v) der Aufgabe 26, um zunächst mit glatten Funktionen zu rechnen.

Aufgabe 28

[Eigenschaften der Adjungierten]

Seien \mathcal{H} ein Hilbertraum und $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ stetige lineare Abbildungen mit ihren Adjungierten S^* und T^* . Zeigen Sie:

- (i) $(ST)^* = T^*S^*$.
(ii) $(S+T)^* = S^* + T^*$.
(iii) $\ker(T) = (\text{im}(T^*))^\perp$.
(iv) $\overline{\text{im}(T^*)} = (\ker(T))^\perp$.
(v)* Finden Sie ein Beispiel, für das $\text{im}(T^*) \neq (\ker(T))^\perp$
-