

Übungen zur Vorlesung
Funktionalanalysis
Serie 9 vom 14.12.2023
Abgabedatum: 9.1.2023

Aufgabe 33

[Lineare Funktionale]

Sei $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$ ein normierter linearer Raum und $v_0 \in \mathcal{V}$. Zeigen Sie:

- (i) Falls $v_0 \neq 0$, dann existiert ein stetiges lineares Funktional $l_0 \in \mathcal{V}'$, sodass $\|l_0\|_{\mathcal{V}'} = 1$ und $l_0(v_0) = \|v_0\|_{\mathcal{V}}$.
- (ii) Ist $l(v_0) = 0$ für alle $l \in \mathcal{V}'$, dann ist $v_0 = 0$.
- (iii) Durch die Zuordnung $T(l) := l(v_0)$ für $l \in \mathcal{V}'$ ist eine lineare Abbildung $T : \mathcal{V}' \rightarrow \mathbb{K}$ definiert, und es gilt $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V}', \mathbb{K}) = (\mathcal{V}')' =: \mathcal{V}''$ mit $\|T\|_{\mathcal{V}''} = \|v_0\|_{\mathcal{V}}$. (Der Raum \mathcal{V}'' wird häufig als der *Bidualraum* von \mathcal{V} bezeichnet.)

Aufgabe 34

[Banach-Steinhaus und Folgerung]

Sei $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ ein Banachraum und $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$ ein linearer normierter Raum und $(T_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{V})$ eine Folge von beschränkten linearen Abbildungen von \mathcal{B} nach \mathcal{V} .

- (i) Zeigen Sie: Falls es eine Abbildung $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}$ gibt, sodass $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k(x) = T(x)$ für alle $x \in \mathcal{B}$, dann gilt $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|T_k\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{V})} < \infty$ und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{V})$ mit der Abschätzung

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{V})} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|T_k\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{V})}.$$

- (ii)* Beweisen Sie *ohne* Satz 2.5 (Bairescher Kategoriensatz) und *ohne* Satz 2.6 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit) die folgende Version des Satzes von Banach-Steinhaus: Falls $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|T_k(x)\|_{\mathcal{V}} < \infty$ für alle $x \in \mathcal{B}$, dann ist $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|T_k\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{V})} < \infty$.

Hinweis: Argumentieren Sie in Teil (ii) indirekt, indem Sie annehmen, dass die Normen $\|T_k\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{V})}$ für eine Teilfolge genügend schnell explodieren, sodass man Punkte v_k beliebig kleiner Norm findet, sodass die Werte $\|T_k(v_k)\|_{\mathcal{V}} / \|v_k\|_{\mathcal{B}}$ ebenfalls in dieser Größenordnung explodieren. Starten Sie mit $u_0 := 0$ und konstruieren Sie induktiv eine Cauchyfolge durch $u_k := u_{k-1} + \pm v_k$, für deren Grenzwert u dann die Werte $\|T_k(u)\|_{\mathcal{V}}$ im Widerspruch zur Voraussetzung explodieren.*

Aufgabe 35

[Schwache Konvergenz]

Zeigen Sie:

- (i) Sei $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ ein Banachraum. Es sei $\beta : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische, positiv-semidefinite und stetige Bilinearform, dann gilt für eine schwach in \mathcal{B} konvergente Folge $x_k \rightharpoonup x$ die Ungleichung

$$\beta(x, x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \beta(x_k, x_k).$$

(Man sagt auch, β ist *folgenunterhalbstetig* bzgl. der schwachen Konvergenz.)

- (ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty]$. Dann gilt für Sobolevfunktionen $f_l, f \in W^{k,p}(\Omega)$: $f_l \rightharpoonup f$ in $W^{k,p}(\Omega)$ für $l \rightarrow \infty$ genau dann, wenn die Funktionen f_l für $l \rightarrow \infty$ schwach in $L^p(\Omega)$ gegen f konvergieren, und die schwachen Ableitungen $\partial^\alpha f_l$ schwach gegen $\partial^\alpha f$ in $L^p(\Omega)$ für $l \rightarrow \infty$ für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leq k$ konvergieren.

Hinweis: Für die Beweisrichtung in Teil (ii), bei der man die schwache Konvergenz der schwachen Ableitungen in $L^p(\Omega)$ voraussetzt, kann man jeder Funktion $g \in W^{k,p}(\Omega)$ den Vektor aller schwachen Ableitungen $\partial^\alpha g$ zuordnen, und man kann zeigen, dass diese Abbildung in den Raum $L^p(\Omega, \mathbb{R}^L)$ (L =Zahl aller schwachen Ableitungen) linear und stetig ist und eine stetige Inverse besitzt. Lineare Funktionale auf $W^{k,p}(\Omega)$ können mit dieser Abbildung in lineare Funktionale auf diesem Bildraum verwandelt werden und mit dem Satz von Hahn-Banach auf ganz $L^p(\Omega, \mathbb{R}^L)$ fortgesetzt werden, um die vorausgesetzte schwache Konvergenz der schwachen Ableitungen ins Spiel zu bringen.

Aufgabe 36

[Schwacher und punktweiser Grenzwert in L^p]

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes und beschränktes Gebiet und $p \in [1, \infty]$ und $f_k, f, g \in L^p(\Omega)$. Beweisen Sie: Falls $f_k \rightharpoonup f$ in $L^p(\Omega)$ und $f_k(x) \rightarrow g(x)$ für \mathcal{L}^n -fast alle $x \in \Omega$, dann ist $g(x) = f(x)$ für \mathcal{L}^n -fast alle $x \in \Omega$.

Hinweis: Führen Sie die punktweise Konvergenz fast überall mit Hilfe des Satzes von Egoroff auf eine gleichmäßige Konvergenz auf einer großen Teilmenge von Ω zurück.
