Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Nicolas Freches

Übungen zur Vorlesung
Funktionalanalysis
Serie 2 vom 27.10.2025
Abgabedatum: 5.11.2025

Aufgabe 5

[Metrische Räume]

(i) Sei $\mathbb{C}^{\mathbb{N}} := \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} : x_k \in \mathbb{C} \text{ für } k \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller komplexen Folgen. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ mit der von der Fréchet-Metrik

$$\rho(x) := \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} \frac{|x_k|}{1+|x_k|} \quad \text{für } x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$$

induzierten Metrik $d(x,y) := \rho(x-y)$ ein vollständiger metrischer Raum ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ für den Beweis der Vollständigkeit von $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

(ii) Sei $(\mathscr{M}, d)$ ein metrischer Raum und $\mathscr{A}$ die Menge aller nichtleeren, abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen von $\mathscr{M}$. Dabei heißt eine Menge $A \subset \mathscr{M}$ beschränkt, wenn es einen Punkt $x_0 \in \mathscr{M}$ und eine Zahl $R > 0$ gibt, so dass $d(x_0, a) \leq R$ für alle $a \in A$. Der *Hausdorff-Abstand* $\operatorname{dist}_{\mathscr{H}}(A,B)$ zweier Mengen $A, B \in \mathscr{A}$ ist definiert durch

$$\operatorname{dist}_{\mathscr{H}}(A,B) := \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon(B) \text{ und } B \subset B_\varepsilon(A)\},$$

wobei $B_\varepsilon(C) := \{x \in \mathscr{M} : \operatorname{dist}(x,C) := \inf_{c\in C} d(x,c) < \varepsilon\}$ die ε-Umgebung einer Menge $C \subset \mathscr{M}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass $(\mathscr{A}, \operatorname{dist}_{\mathscr{H}})$ ein metrischer Raum ist.

Aufgabe 6

[Vollständigkeit]

Sei $\operatorname{Pol}(n) := \{p : [0,1] \to \mathbb{R} : p \text{ ein Polynom vom Grad höchstens } n\}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\mathscr{P} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Pol}(n)$$

mit der Supremumsnorm $\|f\|_{C^0([0,1])} := \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$ ein normierter aber *nicht* vollständiger Raum ist.

Aufgabe 7

[Separabilität]

(i) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge. Zeigen Sie, dass der Funktionenraum

$$(C^0(K), \|\cdot\|_{C^0(K)})$$

der auf K stetigen reellwertigen Funktionen zusammen mit der Supremumsnorm $\|f\|_{C^0(K)} := \sup_{x \in K} |f(x)|$ separabel ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die p-summierbaren Folgenräume (vgl. Aufgabe 3) ℓ^p für $p \in [1, \infty)$ separabel sind, nicht aber für $p = \infty$.

Aufgabe 8

[Hölderräume]

Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}^m$ definiert man zu $\alpha \in (0, 1]$ die *Hölderkonstante*

$$\text{Höl}_{\alpha,A} f := \sup_{\substack{x,y \in A \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \in [0, \infty].$$

(Für $\alpha = 1$ heißt die Hölderkonstante auch *Lipschitzkonstante*, und man schreibt dann auch $\text{Höl}_{1,A} f =: \text{Lip}_A f$.) Zeigen Sie, dass für eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ die zugehörigen *Hölderräume*

$$C^{0,\alpha}(K) := \{ f \in C^0(K) : \text{Höl}_{\alpha,K} f < \infty \}$$

bezüglich der *Höldernorm*

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(K)} := \|f\|_{C^0(K)} + \text{Höl}_{\alpha,K} f$$

Banachräume sind.
