

Übungen zur Vorlesung
Funktionalanalysis
Serie 4 vom 10.11.2025
Abgabedatum: 19.11.2025

Aufgabe 13

[Strikte Konvexität]

Eine abgeschlossene konvexe Menge C in einem linearen Raum \mathcal{H} heißt *strikt konvex*, wenn der Rand $\partial C = \overline{C} \setminus \text{int}(C) = C \setminus \text{int}(C)$ nur aus extremalen Punkten besteht. Dabei heißt ein Punkt $x \in C$ *extremal*, wenn folgendes gilt: Falls $x = ty + (1-t)z$ für irgendwelche $y, z \in C$, $y \neq z$, und $t \in [0, 1]$, dann folgt $t \in \{0, 1\}$.

Zeigen Sie, dass in einem beliebigen Hilbertraum \mathcal{H} die Menge

$$\{x \in \mathcal{H} : \|x\|_{\mathcal{H}} = 1\}$$

den Rand des Einheitsballes

$$\overline{B_1(0)} := \{x \in \mathcal{H} : \|x\|_{\mathcal{H}} \leq 1\}$$

darstellt, und weiter, dass $\overline{B_1(0)} \subset \mathcal{H}$ eine strikt konvexe Menge ist.

Aufgabe 14

[Vollständiges Orthonormalsystem]

- (i) Aus der Fourieranalysis ist bekannt, dass für eine Lipschitz-stetige Funktion $f \in C^{0,1}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \langle f, \varphi_k \rangle_{L^2} \varphi_k(x) = f(x) \text{ für alle } x \in (-\pi, \pi), \quad (1)$$

wobei

$$\varphi_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \quad x \in (-\pi, \pi), k \in \mathbb{Z},$$

und $\langle g, h \rangle_{L^2} := \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \overline{h(y)} dy$ für $g, h \in L^2((-\pi, \pi), \mathbb{C})$.

Zeigen Sie mit Hilfe von (1), dass $\{\varphi_i : i \in \mathbb{Z}\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem des Hilbertraums $L^2((-\pi, \pi), \mathbb{C})$ bildet. Sie dürfen dazu ohne Beweis annehmen, dass der Raum $C_0^\infty((-\pi, \pi), \mathbb{C})$ der glatten Funktionen mit kompaktem Träger in $(-\pi, \pi)$ dicht in $L^2((-\pi, \pi), \mathbb{C})$ liegt. Auch den Beweis, dass $L^2((-\pi, \pi), \mathbb{C})$ vollständig ist, brauchen Sie hier nicht zu führen.

- (ii)* Sei $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset \mathcal{H}$ ein vollständiges Orthonormalsystem des Hilbertraums \mathcal{H} , und für ein weiteres Orthonormalsystem $\{f_1, f_2, \dots\} \subset \mathcal{H}$ gelte

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_k - f_k\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty.$$

Zeigen Sie, dass dann auch $\{f_1, f_2, \dots\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von \mathcal{H} bildet.

Aufgabe 15

[Lineare Projektionen]

Sei U ein Unterraum des linearen Raumes V , dann heißt eine lineare Abbildung $P : V \rightarrow V$ (lineare) Projektion auf U , falls $P \circ P = P$ und $\text{im}(P) = U$.

Beweisen Sie:

- (i) Die orthogonale Projektion $\pi_A : \mathcal{H} \rightarrow A$ auf einen abgeschlossenen Unterraum A eines Hilbertraums \mathcal{H} aus Satz 1.15 der Vorlesung (vgl. Def. 1.16 der Vorlesung) ist eine (lineare) Projektion im obigen Sinne.
- (ii) P ist lineare Projektion auf U genau dann, wenn $P : V \rightarrow U$ linear und $P = \text{Id}_V$ auf U .
- (iii) Ist $P : V \rightarrow V$ eine Projektion, dann gilt $V = \ker(P) \oplus \text{im}(P)$, wobei $X \oplus Y$ die direkte Summe zweier linearer Unterräume $X, Y \subset V$ mit $X \cap Y = \{0\}$ bezeichnet.
- (iv) Mit P ist auch $\text{Id} - P$ eine Projektion mit

$$\ker(\text{Id} - P) = \text{im}(P) \text{ und } \text{im}(\text{Id} - P) = \ker(P).$$

Aufgabe 16

[Lineare Operatoren]

Sei $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ die Menge der linearen Operatoren, d.h. der linearen und stetigen Abbildungen von \mathcal{V} nach \mathcal{W} , wobei $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$ und $(\mathcal{W}, \|\cdot\|_{\mathcal{W}})$ normierte lineare Räume sind.

Zeigen Sie:

- (i) $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ ist mit der Operatornorm

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})} := \sup_{\substack{v \in \mathcal{V} \\ \|v\|_{\mathcal{V}} \leq 1}} \|Tv\|_{\mathcal{W}}$$

ein normierter linearer Raum.

- (ii) $(\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W}), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})})$ ist ein Banachraum, falls \mathcal{W} ein Banachraum ist.
- (iii) Sei \mathcal{Z} ein weiterer normierter linearer Raum. Dann ist für $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ und $S \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{Z})$ die Komposition $ST = S \circ T \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{Z})$ und genügt der Abschätzung

$$\|ST\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{Z})} \leq \|S\|_{\mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{Z})} \cdot \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})}.$$
