Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Alexandra Gilsbach

Übungen zur Vorlesung
Geometrische Krümmungsfunktionale
Serie 1 vom 15.4.2015
Abgabedatum: 24.6.2015

Aufgabe 1

[Umsphärenradius]

Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ der Graph der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(u,v) := u \cdot v$ für $u,v \in \mathbb{R}^2$, und $R(T)$ bezeichne den Umsphärenradius des Tetraeders $T := (\xi, x, y, z)$, $\xi, x, y, z \in \mathbb{R}^3$, wobei $1/R(T) := 0$, falls die Punkte ξ, x, y, z koplanar sind.

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion R^{-p} auf $\Sigma^4 := \Sigma \times \Sigma \times \Sigma \times \Sigma$ für alle $p \geq 1$ unbeschränkt ist.

(ii) Zeigen Sie, dass das geometrische Krümmungsfunktional

$$\mathscr{S}_p(\Sigma) := \int_\Sigma \int_\Sigma \int_\Sigma \int_\Sigma \frac{1}{R^p(\xi,x,y,z)} \, d\mathscr{H}^2(x) d\mathscr{H}^2(y) d\mathscr{H}^2(z) d\mathscr{H}^2(\xi)$$

für jedes genügend große p einen unendlichen Wert hat.

Aufgabe 2

[Integranden vom Légerschen Typ]

Sei

$$\mathscr{F}(\xi,x,y,z) := \frac{\operatorname{dist}(\xi, \operatorname{aff}\{x,y,z\})}{M(|\xi - x|, |\xi - y|, |\xi - z|)^\alpha} \text{ für } \alpha > 1,$$

wobei $M : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ eine *Mittelwertfunktion* ist, d.h. die Bedingungen

(M1) M ist positiv homogen vom Grad 1,

(M2) M ist monoton wachsend in jedem Argument,

(M3) $\min\{t,r,s\} \leq M(t,r,s) \leq \max\{t,r,s\}$ für alle $t,r,s \geq 0$,

erfüllt. Sei $U \subset \Sigma$ eine relativ offene Menge auf einer randlosen kompakten C^2-Hyperfläche $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, so dass die Gaußkrümmung K_Σ auf U strikt positiv ist. Zeigen Sie, dass für $(\alpha - 1)p \geq 12$ gilt

$$\int_U \int_U \int_U \int_U \mathscr{F}(\xi,x,y,z)^p \, d\mathscr{H}^2(x) d\mathscr{H}^2(y) d\mathscr{H}^2(z) d\mathscr{H}^2(\xi) = +\infty.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass für jedes $p \in U$ ein Radius $R(p) > 0$ und eine strikt konvexe Funktion $f_p \in C^2(T_p\Sigma, T_p\Sigma^\perp)$ mit $f_p(0) = 0$ und $Df_p(0) = 0$, existiert, so dass

$$\Sigma \cap B_{R(p)}(p) = (p + \operatorname{graph}(f_p)) \cap B_{R(p)}(p).$$

Aufgabe 3

[Tangenten-Punkt-Radius]

Zeigen Sie, dass für eine m-dimensionale, kompakte, eingebettete, randlose C^2-Untermannigfaltigkeit $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ der Ausdruck $R_{\mathrm{tp}}^{-1}(x,y)$ auf $\Sigma \times \Sigma$ durch eine von Σ abhängige Konstante $C(\Sigma) > 0$ nach oben abgeschätzt ist. Hierbei bezeichnet $R_{\mathrm{tp}}(x,y)$ den *Tangenten-Punkt-Radius* von x und y, d.h. den Radius der kleinsten Hypersphäre durch die Punkte $x, y \in \Sigma$, die zugleich tangential an Σ im Punkt x ist.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass für jedes $p \in \Sigma$ ein Radius $R(p) > 0$ und eine Funktion $f_p \in C^2(T_p\Sigma, T_p\Sigma^\perp)$ mit $f_p(0) = 0$ und $Df_p(0) = 0$, existiert, so dass

$$\Sigma \cap B_{R(p)}(p) = (p + \mathrm{graph}(f_p)) \cap B_{R(p)}(p).$$

Aufgabe 4

[Simplices]

Sei $T := (x_0, x_1, \dots, x_{k+1}) \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq k \leq n-1$, ein $(k+1)$-dimensionaler Simplex mit dem $(k+1)$-dimensionalen Volumen $\mathscr{H}^{k+1}(T)$, beweisen Sie:

(i) Es gilt die Identität $\mathscr{H}^{k+1}(T) = \frac{1}{k+1} h_i(T) \mathscr{H}^k(\mathrm{fc}_i T)$, wobei $\mathrm{fc}_i T := (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{k+1})$ der i-te k-dimensionale Randsimplex von T (gegenüber von x_i) ist, und $h_i(T) := \mathrm{dist}(x_i, \mathrm{aff}\{x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{k+1}\})$ die Höhe des Punktes x_i über der von den übrigen Punkten aufgespannten Ebene $\mathrm{aff}\{x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{k+1}\}$ ist.

(ii) Die minimale Höhe $h_{\min}(T) := \min_{i=0,\dots,k+1} h_i(T)$ erfüllt

$$h_{\min}(T) = \frac{(k+1)\mathscr{H}^{k+1}(T)}{\max_{0 \leq i \leq k+1} \mathscr{H}^k(\mathrm{fc}_i T)}.$$

(iii) Es gilt die Abschätzung

$$\frac{1}{(k+1)!} h_{\min}^{k+1}(T) \leq \mathscr{H}^{k+1}(T).$$

Aufgabe 5

[Kreis minimiert eindeutig Tangenten-Punkt Energie]

Beweisen Sie für $p > 0$ und eine beliebige einfach geschlossene C^1-Kurve $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ die Ungleichung

$$(\mathscr{E}_p^G(\gamma))^{1/p} \geq 2\pi \mathscr{H}^1(\gamma)^{\frac{1}{p}-1},$$

und zeigen Sie, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn γ ein Kreis ist. Hierbei ist

$$\mathscr{E}_p^G(\gamma) := \int_\gamma \sup_{\substack{y \in \gamma \\ y \neq x}} \frac{1}{R_{\mathrm{tp}}^p(x,y)} \, d\mathscr{H}^1(x)$$

die in der Vorlesung definierte Tangenten-Punkt Energie, wobei $R_{\mathrm{tp}}(x,y)$ den Radius der kleinsten Hypersphäre bezeichnet, die die Punkte x und y enthält, und die tangential an die Kurve γ im Punkt x ist.

Aufgabe 6

[Zulässige Mengen] Sei für $\delta \in (0,1)$ die Menge $\mathscr{A}(\delta)$ die in der Vorlesung in Definition 6.1 definierte Klasse zulässiger Mengen. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen Σ jeweils in der Klasse $\mathscr{A}(\delta)$ für alle $\delta \in (0,1)$ sind.

(i) Σ sei eine kompakte, zusammenhängende, randlose, eingebettete m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, $1 \le m \le n-1$.

(ii) $\Sigma = \bigcup_{i=1}^N M_i$, wobei M_i wie in (i) mit $\mathscr{H}^m(M_i \cap M_j) = 0$ für $i \neq j$.

(iii) $\Sigma := \bigcup_{i=1}^N f_i(M_i)$, wobei M_i für $i = 1, \dots, N$ kompakte, zusammenhängende, randlose, m-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeiten sind, und $f_i : M_i \to \mathbb{R}^n$ seien C^1-Immersionen, d.h., $\operatorname{Rang} df_i = m$ auf M_i für alle $i = 1, \dots, N$, mit

$$\mathscr{H}^m(f_i(M_i) \cap f_j(M_j)) = 0 \text{ für alle } i \neq j,$$

und mit

$$\mathscr{H}^m(\{y \in f_i(M_i) : \sharp f_i^{-1}(y) > 1\}) = 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, N.$$

(iv) Σ wie in (i), (ii), oder (iii), dann zeige $\tilde{\Sigma} := h(\Sigma)$ ist ebenfalls in $\mathscr{A}(\delta)$ für alle $\delta \in (0,1)$, wenn $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein biLipschitz Homöomorphismus ist.

(v) Sei $m = 2$ und $n = 3$ und $\Sigma := \bigcup_{i=0}^\infty M_i \cup \{0\} \subset \mathbb{R}^3$, wobei $M_i := \mathbb{S}^2(c_i, r_i, \mathbb{R}^3)$ zweidimensionale Sphären mit Zentren $c_i := (p_i + p_{i+1})/2$, $p_i := (2^{-i}, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$, und mit Radien $r_i := 2^{-(i+2)}$ im $\mathbb{R}^3$ sind.

(vi) Sei $m = 2$ und $n = 3$ und $\Sigma := \bigcup_{i=0}^\infty \left(\bigcup_{k=1}^{2^i} \Sigma_{i,k} \right) \cup Z$, wobei $Z := \{(1, t, 2) : t \in [0,1]\}$ ein abgeschlossenes Segment ist, und $\Sigma_{0,1} := \partial([0,1]^3) \subset \mathbb{R}^3$, und

$$\Sigma_{i,k} := \partial([0, 2^{-i}]^3) + (1 - 2^{-i})(e_1 + 2e_3) + (k-1)2^{-i} e_2$$

für festes i und $k \in \{1, \dots, 2^i\}$.

Hinweis: Für Σ wie in (i) dürfen Sie ohne Beweis die Bedingung (A4) aus Definition 6.1 voraussetzen. Diese Information aus (i) können Sie dann auch für die anderen Situationen (ii)–(iv) ausnutzen. In (v) und (vi) können Sie explizit argumentieren, beachten Sie, dass die Kodimension eins ist, so dass sich Einheitssphären in Normalenräumen zu zwei Punkten reduzieren.

Aufgabe 7

[Linking mod 2]

Beweisen Sie unter Verwendung des Satzes über den Abbildungsgrad (siehe Vorlesung Kapitel 6.1) für eine zulässige Menge $\Sigma \in \mathscr{A}(\delta)$ die folgenden Aussagen.

(i) Sei $\mathscr{N}$ eine kompakte, randlose $(n-m-1)$-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit und definiere $\mathscr{N}_j := h_j(\mathscr{N})$ für $j = 0, 1$ als die Bilder unter den C^1-Einbettungen $h_j : \mathscr{N} \to \mathbb{R}^n$, so dass $\mathscr{N}_j \cap \Sigma = \emptyset$ für $j = 0, 1$.

Dann gilt für jede Homotopie $H \in C^0(\mathscr{N} \times [0,1], \mathbb{R}^n \setminus \Sigma)$ mit $H(\cdot, 0) = h_0$ und $H(\cdot, 1) = h_1$ die Identität ("Homotopieinvarianz")

$$\operatorname{Lk}_2(\Sigma, \mathscr{N}_0) = \operatorname{Lk}_2(\Sigma, \mathscr{N}_1).$$

(ii) Für $x \in \Sigma^*$ gilt: $\mathrm{Lk}_2(\Sigma, \mathbb{S}^{n-m-1}(x,r;H_x^\perp)) = 1$ für alle $r \in (0, r_0(x))$. (Hierbei ist für $l \in \mathbb{N}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\rho > 0$ und $P \in G(n,l)$ die Notation

$$\mathbb{S}^{l-1}(\xi,\rho,P) := \xi + \{v \in P : |v| = \rho\}$$

verwendet worden.)

(iii) Für $y \in \mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ mit $\mathrm{dist}(y,\Sigma) > 3\varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\mathrm{Lk}_2(\Sigma, \mathbb{S}^{n-m-1}(y,r;V)) = 0 \qquad \text{für alle } \ r \in (\varepsilon, 2\varepsilon), V \in G(n,n-m).$$

(iv) Für $y \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $V \in G(n,n-m)$ mit $\mathrm{Lk}_2(\Sigma, \mathbb{S}^{n-m-1}(y,r;V)) = 1$ gilt:

$$\mathbb{D}^{n-m}(y,r;V) \cap \Sigma \neq \emptyset,$$

wobei $\mathbb{D}^{n-m}(z,\rho;V) := z + \{v \in V : |v| \le r\}$.

Aufgabe 8

[Quantitative Lineare Algebra]

Seien $1 \le l \le m \le n$, $\varepsilon_1 := 10^{-1}(10^m+1)^{-1}$ und $X, Y \in G(n,l)$. Beweisen Sie:

(i) Falls Orthonormalbasen $\{e_1,\dots,e_l\}$ von X und $\{f_1,\dots,f_l\}$ von Y mit $|e_j - f_j| \le \alpha$ für alle $j = 1,\dots,l$ existieren, dann gilt $\sphericalangle(X,Y) \le 2l\alpha$.

(ii) Für eine Orthonormalbasis $\{e_1,\dots,e_l\}$ von X und Vektoren $h_1,\dots,h_l \in \mathbb{R}^n$ mit $|h_j - e_j| < \varepsilon < \varepsilon_1$ gilt: Die Vektoren h_i, $i = 1,\dots,l$ sind linear unabhängig. Weiterhin gilt: Wendet man auf die Vektoren h_i, $i = 1,\dots,l$, das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren an, so erhält man Vektoren

$$u_i := \frac{v_i}{|v_i|}, \quad \text{wobei} \quad v_1 := h_1,\, v_{k+1} := h_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{h_{k+1}\cdot v_j}{|v_j|^2} v_j,\, k+1 \le l,$$

die folgende Eigenschaften erfüllen:

$$|v_k - h_k| < 10^k\varepsilon, \qquad \big||v_k| - 1\big| < (10^k+1)\varepsilon < \frac{1}{10} \quad \text{für alle } k = 1,\dots,l, \tag{1}$$

$$|u_k - e_k| < c_1\varepsilon < \frac{1}{2} \quad \text{für alle } i = 1,\dots,l, \tag{2}$$

wobei $c_1 := 2(10^m+1)$. Falls $Y = \mathrm{span}\,(h_1,\dots,h_l)$, dann

$$\sphericalangle(X,Y) \le c_2\varepsilon\,, \tag{3}$$

mit $c_2 := 2mc_1 = 4m(10^m+1)$.

(iii) Für orthonormale Vektoren $e_1,\dots,e_m \in \mathbb{R}^n$ und Vektoren $h_i \in B_\delta(e_i)$ mit $\delta < \varepsilon_1/2$, und Vektoren $w_i \in B_\varepsilon(h_i)$ mit $\varepsilon < \varepsilon_1/2$, für $i = 1,\dots,m$, gilt: Die Unterräume $H := \mathrm{span}\{h_1,\dots,h_m\}$ und $W := \mathrm{span}\{w_1,\dots,w_m\}$ sind m-dimensional und erfüllen $\sphericalangle(H,W) \le c_3\varepsilon$, wobei $c_3 := 14m \cdot 20^m$.

Hinweis: Sie müssen nicht unbedingt mit diesen konkreten dimensionsabhängigen Konstanten ε_1, c_1, c_2 und c_3 arbeiten, so lange Ihre Konstanten nicht noch von anderen Größen abhängen. Für Teil (iii) können Sie die folgende Aussage ohne Beweis benutzen, wenn Sie aber auch dafür einen Beweis liefern, dann gibt es Zusatzpunkte: Für $a, b > 0$ und $s_k \ge 0$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $s_1 \le 1$ und mit

$$s_{k+1} \le ak + b\sum_{j=1}^{k} s_j \quad \textit{für } \ k \ge 1$$

gilt: Für jedes $A \ge 1 + \max\{2a, 2b\}$ hat man $s_k < A^k$ für $k \in \mathbb{N}$.
