Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Bastian Käfer

Übungen zur Vorlesung
Geometrische Knotentheorie
Serie 1 vom 7.5.2019
Abgabedatum: 17.6.2019

Aufgabe 1

[Ausschluss von Überlagerungen]

Sei $\gamma \in \mathscr{C}$, wobei

$$\mathscr{C} := \{\eta \in C^{0,1}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^3) : |\eta'| \equiv 1 \quad \text{f.ü. }, \mathscr{H}^1(\eta(\mathbb{R}/\mathbb{Z})) = \mathscr{L}^1(\eta)\}$$

die Klasse der *unit loops* ist.

Zeigen Sie:

(i) $\gamma(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ kann nicht homöomorph zum Intervall $[0,1]$ sein.

(ii) γ kann keinen Teilbogen positiven Hausdorffmaßes doppelt durchlaufen.

(iii) Falls weder γ noch irgendein abgeschlossener Teilbogen $\tilde{\gamma} \subset \gamma$ homöomorph zur $\mathbb{S}^1$ ist, dann erfüllt die durch die Inklusion "$\subset$" teilgeordnete Menge

$$\mathscr{A} := \{\tilde{\gamma} \subset \gamma : \tilde{\gamma} \text{ homöomorph zum Intervall } [0,1]\}$$

die Voraussetzungen des Lemmas von Zorn.

(iv) Falls $\gamma(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ homöomorph zur $\mathbb{S}^1$ ist, dann ist γ ein Knoten, d.h., $\gamma|_{[0,1)}$ ist injektiv.

Aufgabe 2

[1D-Mannigfaltigkeit durch Kontrolle der β-Zahlen]

Die β-*Zahl* einer Menge $A \subset \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\beta_A(x,d) := \inf \left\{ \sup_{y \in A \cap B_d(x)} \frac{\operatorname{dist}(y,G)}{d} : \quad G \text{ Gerade durch } x \right\} \quad \text{für } d > 0, x \in \mathbb{R}^3.$$

Zeigen Sie, dass das Bild $\gamma(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ eines unit loop $\gamma \in \mathscr{C}$ eine (möglicherweise berandete) eindimensionale topologische Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist, falls

$$\sup_{x \in \gamma} \beta_\gamma(x,d) \leq \omega(d) \quad \text{für alle } d \in [0, \operatorname{diam} \gamma],$$

wobei $\omega : [0, \operatorname{diam} \gamma] \to \mathbb{R}$ eine stetige, monoton wachsende Funktion mit $\omega(0) = 0$ ist. (Damit ist $\gamma(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ entweder homöomorph zur $\mathbb{S}^1$ oder zu dem Intervall $[0,1]$.)

Aufgabe 3

[1D-Mannigfaltigkeit wegen endlicher Tangenten-Punkt-Energie]

Sei $\mathscr{C}$ die in der Vorlesung eingeführte Klasse der *unit loops* und

$$\mathrm{TP}_p(\gamma) := \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{r_{\mathrm{tp}}[\gamma](\gamma(t),\gamma(s))^p}\, dt ds \text{ für } \gamma \in \mathscr{C}$$

die *Tangenten-Punkt-Energie*. Zeigen Sie: Wenn für eine Kurve $\gamma \in \mathscr{C}$

$$\mathrm{TP}_2(\gamma) < \infty,$$

dann ist γ eine kompakte eindimensionale Mannigfaltigkeit homömorph zur $\mathbb{S}^1$.

Hinweis: Versuchen Sie zunächst zu zeigen, dass eine Konstante $c > 0$ existiert, so dass

$$\sup_{x\in\gamma} \beta_\gamma(x,d) \leq c\omega_E(d) \quad \textit{für } d \in (0, \operatorname{diam}\gamma),$$

wobei in

$$\omega_E(d) := \sup\left(\int_A \int_B \frac{dt ds}{r_{\mathrm{tp}}[\gamma](\gamma(t),\gamma(s))^2}\right)^{1/6}$$

das Supremum über alle Teilmengen $A, B \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit Maß $\mathscr{H}^1(A), \mathscr{H}^1(B) \leq d/100$ genommen wird. Wenn man das hat, kann man Aufgabe 2 anwenden.
