

Übungen zur Vorlesung  
Geometrische Knotentheorie I  
Serie 1 vom 4.12.2014  
Abgabedatum: 8.1.2014

---

Aufgabe 1

**[Bogenlängenparametrisierung]**

Für  $-\infty < a < b < \infty$  und eine Kurve  $\gamma \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$  definiert man die *Länge*  $\mathcal{L}(\gamma)$  durch

$$\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}_{[a,b]}(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^m |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| : a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b \right\} \quad (1)$$

und nennt die Kurve  $\gamma$  *rektifizierbar*, wenn  $\mathcal{L}(\gamma) < \infty$ .

- (i) Beweisen Sie für eine injektive rektifizierbare Kurve  $\gamma \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$  die Existenz einer *Bogenlängenparametrisierung*  $\Gamma : [0, \mathcal{L}(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so dass  $\mathcal{L}_{[0,s]}(\Gamma) = s$  für alle  $s \in [0, \mathcal{L}(\gamma)]$  und mit

$$|\Gamma(s) - \Gamma(\sigma)| \leq |s - \sigma| \text{ für alle } s, \sigma \in [0, \mathcal{L}(\gamma)].$$

- (ii) Zeigen Sie, dass für  $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$  gilt:

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

- (iii) Zeigen Sie für (eine nicht notwendig injektive) Kurve  $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$  mit  $|\gamma'(t)| > 0$  für alle  $t \in [a, b]$  die Existenz einer Bogenlängenparametrisierung.

- (iv)\* Beweisen Sie Teil (i) ohne die Voraussetzung der Injektivität.

*Hinweis: Aufgaben mit Sternchen \* liefern Zusatzpunkte.*

---

Aufgabe 2

**[Knoten]**

Sei  $L > 0$ . Zeigen Sie: Jede geschlossene Kurve  $\gamma \in C^0(\mathbb{R}/(L\mathbb{Z}), \mathbb{R}^n)$ ,  $n \geq 2$ , mit  $\gamma|_{[0,L]}$  injektiv, ist ein Knoten.

*Hinweis: Definieren Sie  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n \subset \mathbb{S}^n$  durch  $f \circ e^{i(\cdot)} := \gamma((L/2\pi)\cdot)$  und zeigen Sie, dass  $f$  eine Einbettung ist.*

---

Aufgabe 3

**[Ambiente Isotopie]**

Zeigen Sie, dass die Relation “ambient isotop” auf der Menge der Knoten  $f : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^n$ ,  $n \geq k$ , eine Äquivalenzrelation ist.

*Hinweis: Zum Nachweis der Symmetrie dürfen Sie ohne Beweis das folgende topologische Resultat (vgl. [Hatcher: Algebraic Topology, Cor. 2B.4]) benutzen: Sei  $\mathcal{M}^n$  eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{N}^n$  eine zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit, dann ist jede Einbettung  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  surjektiv. (In der vorliegenden Situation ist  $\mathcal{M}^n = \mathcal{N}^n = \mathbb{S}^n$ .)*

## Aufgabe 4

### [Zahme Knoten]

- (i) Sei  $L > 0$ . Zeigen Sie: Jede auf  $[0, L)$  injektive, geschlossene Kurve  $\gamma \in C^1(\mathbb{R}/(L\mathbb{Z}), \mathbb{R}^3)$  mit  $|\gamma'(t)| > 0$  für alle  $t \in [0, L)$  ist ambient isotop zu einem einfachen geschlossenen Polygonzug im  $\mathbb{R}^3$ , repräsentiert also eine zahme Knotenklasse.
- (ii) Jede zahme Knotenklasse  $\mathcal{K}$  (im  $\mathbb{R}^3$ ) enthält einen glatten und regulären *unit-loop* als Repräsentanten, d.h., es gibt eine auf  $[0, 1)$  injektive Kurve  $\gamma \in \mathcal{C} \cap C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^3)$  mit  $|\gamma'(t)| > 0$  für alle  $t \in [0, 1)$ , so dass  $[\gamma] = \mathcal{K}$ .
- (iii) Sei  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$  ein Knoten, der eine zahme Knotenklasse repräsentiert, und  $\psi: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  sei ein orientierungserhaltender Homöomorphismus. Zeigen Sie, dass dann  $f$  und  $f \circ \psi$  ambient isotop sind.

*Hinweis* Benutzen Sie für Teil (i), dass eine solche  $C^1$ -Kurve lokal fast "geradlinig" verläuft, so dass Sie für genügend nahe beieinanderliegende Punkte  $x, y \in \gamma$  einen Doppelkegel um die Achse  $\mathbb{R}(x - y)$  angeben können, in dem die Kurve jeden zu der Achse senkrechten Querschnitt nur jeweils einmal schneidet, und so dass zwei verschiedene solche Doppelkegel (bis auf deren Endpunkte) disjunkt sind. Dann kann man die Isotopie konstruieren, indem man innerhalb jedes Kegels die Kurve geeignet auf die Kegelachse deformiert, unter Fixierung des Randes der Doppelkegel.

Für Teil (ii) kann man z.B. die Polygonecken eines polygonalen Repräsentanten geeignet glätten, etwa durch passende Kreisbögen, so dass man eine ambiente Isotopie des Polygons zu einer  $C^{1,1}$ -Kurve konstruieren kann. Dann kann man diese Kurve glatt approximieren (z.B. durch Faltung) und Korollar 1.8 der Vorlesung nutzen. Abschließendes Skalieren auf Länge 1 und reparametrisieren nach Bogenlänge liefert das Gewünschte.

Für Teil (iii) reduziere man das Problem zunächst auf den Nachweis der ambienten Isotopie zwischen  $p \circ \psi$  und  $p$  für einen polygonalen Vertreter von  $[f]$ , dann konstruiere man sich zu  $p$  eine geeignete Tubenumgebung, die man auf eine Standardform eines Torus homöomorph abbilden kann. Innerhalb dieser Standardform kann man eine ambiente Isotopie konstruieren, die dann mit dem Homöomorphismus auf die gewünschte ambiente Isotopie zwischen  $p \circ \psi$  und  $p$  führt.

## Aufgabe 5

### [Anordnung und Konvergenz von Energien]

Zeigen Sie für die geometrischen Krümmungsfunktionale  $\mathcal{M}_p, \mathcal{I}_p, \mathcal{U}_p, \mathcal{E}_p, \mathcal{E}_p^{\text{sym}}$  und das ropelength Funktional  $1/\Delta[\cdot]$  auf der Klasse  $\mathcal{C}$  der unit loops (siehe Vorlesung Kapitel 2.1) die folgenden Aussagen:

$$\mathcal{M}_p^{1/p}(\gamma) \leq \mathcal{I}_p^{1/p}(\gamma) \leq \mathcal{U}_p^{1/p}(\gamma) \leq \frac{1}{\Delta[\gamma]} \quad \text{für alle } \gamma \in \mathcal{C}, p \geq 1; \quad (2)$$

$$(\mathcal{E}_p^{\text{sym}})^{1/p}(\gamma) \leq \mathcal{E}_p^{1/p}(\gamma) \leq \mathcal{I}_p^{1/p}(\gamma) \leq \mathcal{U}_p^{1/p}(\gamma) \leq \frac{1}{\Delta[\gamma]} \quad \text{für alle } \gamma \in \mathcal{C}, p \geq 1; \quad (3)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathcal{M}_p^{1/p}(\gamma) = \lim_{p \rightarrow \infty} \mathcal{I}_p^{1/p}(\gamma) = \lim_{p \rightarrow \infty} \mathcal{U}_p^{1/p}(\gamma) = \frac{1}{\Delta[\gamma]} \quad \text{für alle } \gamma \in \mathcal{C} \text{ mit } \Delta[\gamma] > 0. \quad (4)$$

## Aufgabe 6

### [Pull-tight]

Sei  $\mathcal{K}$  eine nichttriviale Knotenklasse im  $\mathbb{R}^3$ . Zeigen Sie für eine Folge  $(\gamma_i)_i \subset \mathcal{C}(\mathcal{K})$  von unit-loops mit sich zusammenziehenden Schlaufen (*pull-tight sequence*), für die  $\gamma_i \rightarrow \gamma$  in  $C^0(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^3)$  für  $i \rightarrow \infty$ , dass  $[\gamma] \neq \mathcal{K}$ .

---

## Aufgabe 7

### [Unit loops endlicher Energie homöomorph zur $\mathbb{S}^1$ ]

Zeigen Sie, dass für einen unit-loop  $\gamma \in \mathcal{C}$ , dessen Bild  $\gamma(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  eine 1-dimensionale kompakte topologische Mannigfaltigkeit ist, gilt:  $\gamma(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  ist homöomorph zur  $\mathbb{S}^1$ .

*Hinweis: Schließen Sie das kompakte Einheitsintervall  $[0, 1]$  als topologisch einzig andere Möglichkeit aus.*

---

## Aufgabe 8

### [Obere Schranken]

Sei  $\gamma \in \mathcal{C}$  ein unit loop, der nicht homöomorph zur  $\mathbb{S}^1$  ist, und der keinen abgeschlossenen Teilbogen  $\gamma_1 \subsetneq \gamma(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  besitzt, der homöomorph zur  $\mathbb{S}^1$  ist. Zeigen Sie, dass jede bezüglich der Inklusion “ $\subset$ ” total geordnete Teilmenge von

$$\mathcal{A} := \{ \alpha \subset \gamma(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) : \alpha \text{ ist homöomorph zu } [0, 1] \}$$

eine obere Schranke besitzt.

*Hinweis: Diese Teilaussage wurde für die Anwendung des Zornschen Lemmas im Beweis von Satz 2.5 der Vorlesung benötigt.*

---

## Aufgabe 9

### [Überkreuzungen in der Projektion]

Zeigen Sie, dass jede orthogonale Projektion einer nichttrivial verknoteten Kurve im  $\mathbb{R}^3$  auf eine Ebene mindestens drei Selbstschnitte besitzt.

---