Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Bastian Käfer

Übungen zur Vorlesung
Resultate aus der Geometrische Knotentheorie
Serie 1 vom 20.10.2016
Abgabedatum: 9.1.2017

Aufgabe 1

[Bogenlängenparametrisierung]

Für $-\infty < a < b < \infty$ und eine Kurve $\gamma \in C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ definiert man die *Länge* $\mathscr{L}(\gamma)$ durch

$$\mathscr{L}(\gamma) = \mathscr{L}_{[a,b]}(\gamma) := \sup\left\{ \sum_{i=1}^{m} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b \right\} \tag{1}$$

und nennt die Kurve γ *rektifizierbar*, wenn $\mathscr{L}(\gamma) < \infty$.

(i) Beweisen Sie für eine injektive rektifizierbare Kurve $\gamma \in C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ die Existenz einer *Bogenlängenparametrisierung* $\Gamma : [0,\mathscr{L}(\gamma)] \to \mathbb{R}^n$, so dass $\mathscr{L}_{[0,s]}(\Gamma) = s$ für alle $s \in [0,\mathscr{L}(\gamma)]$ und mit

$$|\Gamma(s) - \Gamma(\sigma)| \leq |s - \sigma| \text{ für alle } s,\sigma \in [0,\mathscr{L}(\gamma)].$$

(ii) Zeigen Sie, dass für $\gamma \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\mathscr{L}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

(iii) Zeigen Sie für (eine nicht notwendig injektive) Kurve $\gamma \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ mit $|\gamma'(t)| > 0$ für alle $t \in [a,b]$ die Existenz einer Bogenlängenparametrisierung.

(iv)* Beweisen Sie Teil (i) ohne die Voraussetzung der Injektivität.

*Hinweis: Aufgaben mit Sternchen * liefern Zusatzpunkte.*

Aufgabe 2

[Knoten]

Sei $L > 0$. Zeigen Sie: Jede geschlossene Kurve $\gamma \in C^0(\mathbb{R}/(L\mathbb{Z}),\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, mit $\gamma|_{[0,L)}$ injektiv, ist ein Knoten.

Hinweis: Definieren Sie $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^n \subset \mathbb{S}^n$ durch $f \circ e^{i(\cdot)} := \gamma((L/2\pi)\cdot)$ und zeigen Sie, dass f eine Einbettung ist.

Aufgabe 3

[Ambiente Isotopie]

(i) Zeigen Sie, dass die Relation "ambient isotop" auf der Menge der Knoten $f:\mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$, $n \geq k$, eine Äquivalenzrelation ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Außenräume $\mathbb{S}^n \setminus f_0(\mathbb{S}^k)$ und $\mathbb{S}^n \setminus f_1(\mathbb{S}^k)$ zweier ambient isotoper Knoten $f_0, f_1 : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$ homoömorph sind.

(iii) Zwei Einbettungen $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^3$ sind ambient isotop, falls ein Homöomorphismus $k : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ existiert, der isotop zur Identität $\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^3} : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ ist und für den gilt $\gamma_2 = k \circ \gamma_1$.

Hinweis: Zum Nachweis der Symmetrie in Teil (i) und für Teil (ii) dürfen Sie ohne Beweis das folgende topologische Resultat (vgl. [Hatcher: Algebraic Topology, Cor. 2B.4]) benutzen: Sei $\mathscr{M}^n$ eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit und $\mathscr{N}^n$ eine zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit, dann ist jede Einbettung $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ surjektiv. (In der vorliegenden Situation ist $\mathscr{M}^n = \mathscr{N}^n = \mathbb{S}^n$.)

Aufgabe 4

[Zahme Knoten]

(i) Sei $L > 0$. Zeigen Sie: Jede auf $[0,L)$ injektive, geschlossene Kurve $\gamma \in C^1(\mathbb{R}/(L\mathbb{Z}), \mathbb{R}^3)$ mit $|\gamma'(t)| > 0$ für alle $t \in [0,L)$ ist ambient isotop zu einem einfachen geschlossenen Polygonzug im $\mathbb{R}^3$, repräsentiert also eine zahme Knotenklasse.

(ii) Jede zahme Knotenklasse $\mathscr{K}$ (im $\mathbb{R}^3$) enthält einen glatten und regulären Repräsentanten, d.h., es gibt eine auf $[0,1)$ injektive Kurve $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^3)$ mit $|\gamma'(t)| > 0$ für alle $t \in [0,1)$, so dass $[\gamma] = \mathscr{K}$.

(iii) Sei $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^3$ ein Knoten, der eine zahme Knotenklasse repräsentiert, und $\psi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ sei ein orientierungserhaltender Homöomorphismus. Zeigen Sie, dass dann f und $f \circ \psi$ ambient isotop sind.

Hinweis Benutzen Sie für Teil (i), dass eine solche C^1-Kurve lokal fast "geradlinig" verläuft, so dass Sie für genügend nahe beieinanderliegende Punkte $x, y \in \gamma$ einen Doppelkegel um die Achse $\mathbb{R}(x-y)$ angeben können, in dem die Kurve jeden zu der Achse senkrechten Querschnitt nur jeweils einmal schneidet, und so dass zwei verschiedene solche Doppelkegel (bis auf deren Endpunkte) disjunkt sind. Dann kann man die Isotopie konstruieren, indem man innerhalb jedes Kegels die Kurve geeignet auf die Kegelachse deformiert, unter Fixierung des Randes der Doppelkegel.

Für Teil (ii) kann man z.B. die Polygonecken eines polygonalen Repräsentanten geeignet glätten, etwa durch passende Kreisbögen, so dass man eine ambiente Isotopie des Polygons zu einer $C^{1,1}$-Kurve konstruieren kann. Dann kann man diese Kurve glatt approximieren (z.B. durch Faltung) und Korollar 1.7 der Vorlesung nutzen, um die richtige Knotenklasse zu garantieren. Abschließendes Reparametrisieren nach Bogenlänge liefert das Gewünschte.

Aufgabe 5

[Umsphärenradius einer Kurve]

Zeigen Sie, dass jede geschlossene Kurve $\eta \in C^0(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^3)$ der Länge $0 < L := \mathscr{L}(\eta) < \infty$ in einem abgeschlossenen Ball vom Radius $R \leq L/4$ enthalten ist. Zeigen Sie auch, dass Gleichheit nur herrscht, falls η eine Strecke der Länge $L/2$ parametrisiert, die zweifach in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird.

Aufgabe 6

[Endliche $\mathscr{U}_p$-Energie]

Zeigen Sie, dass eine C^2-eingebettete Kurve endliche $\mathscr{U}_p$-Energie hat, d.h. für $\eta \in C^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z},\mathbb{R}^3)$ mit $\eta|_{[0,1)}$ injektiv und Länge $0 < L := \mathscr{L}(\eta) < \infty$ erfüllt

$$\mathscr{U}_p^{1/p}(\eta) := \left(\int_{\mathbb{R}/L\mathbb{Z}} \frac{1}{(\rho_G[\eta](s))^p}\, ds\right)^{1/p} < \infty \quad \forall p \in [1,\infty].$$

Hinweis: Der Fall $p = \infty$ entspricht der L^∞-Norm von $1/\rho_G[\eta]$.

Aufgabe 7

[Globaler Krümmungsradius ist nicht stetig]

Zeigen Sie mit einem expliziten Beispiel, dass der globale Krümmungsradius als Funktion auf der Menge aller eingebetteten, geschlossenen C^1-Kurven fester Länge nicht stetig ist, d.h., die Funktion

$$\rho_G[\cdot](s) : \mathscr{C}_L \to [0,\infty], \qquad \gamma \in \mathscr{C}_L \mapsto \rho_G[\gamma](s)$$

ist bei fixiertem Parameter $s \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ *nicht* stetig, wobei für $0 < L < \infty$ die Klasse $\mathscr{C}_L$ (versehen mit der C^1-Norm) folgendermaßen definiert ist:

$$\mathscr{C}_L := \{\gamma \in C^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z},\mathbb{R}^3) : \mathscr{L}(\gamma) = L,\ \Gamma|_{[0,L)} \text{ injektiv}\},$$

wobei $\Gamma \in C^1(\mathbb{R}/L\mathbb{Z},\mathbb{R}^3)$ die zu $\gamma \in C^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z},\mathbb{R}^3)$ gehörige Bogenlängenparametrisierung bezeichnet.

Hinweis: Sie können beispielsweise das in der Vorlesung angedeutete Beispiel der sogenannten "Ellenbogenkurven" zu geeigneten geschlossenen Kurven der richtigen Länge fortsetzen.

Aufgabe 8

[Kürzeste im Außenraum einer Kugel*]

Zeigen Sie, dass die Länge einer Kurve γ, die zwei antipodische Punkte außerhalb einer Kugel $B_R(0) \subset \mathbb{R}^3$ verbindet nach unten durch πR abgeschätzt ist, und dass Gleichheit genau dann herrscht, wenn die beiden antipodischen Punkte auf dem Rand $\partial B_R(0)$ liegen und γ mit dem verbindenden halben Großkreis auf $\partial B_R(0)$ übereinstimmt. Folgern Sie daraus, dass die Länge einer geschlossenen differenzierbaren Kurve β, die zwei antipodische Punkte außerhalb des Balles $B_R(0)$ enthält, nach unten durch den Wert $2\pi R$ abgeschätzt werden kann, mit Gleichheit genau dann, wenn die antipodischen Punkte auf dem Rand $\partial B_R(0)$ liegen und β mit einem Großkreis auf $\partial B_R(0)$ übereinstimmt.

*Hinweis: Aufgaben mit * werden mit Zusatzpunkten belohnt.*
