Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Henrik Haeger

Übungen zur Vorlesung
Geometrische Knotentheorie
Serie 1 vom 16.11.2018

Abgabedatum: Aufgaben 1 und 2 am 28.11.2018
Aufgaben 3 und 4 am 12.12.2018
Aufgaben 5 und 6 am 14.1.2019

Aufgabe 1

[Bogenlängenparametrisierung]

Für $-\infty < a < b < \infty$ und eine Kurve $\gamma \in C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ definiert man die *Länge* $\mathscr{L}(\gamma)$ durch

$$\mathscr{L}(\gamma) = \mathscr{L}_{[a,b]}(\gamma) := \sup\left\{ \sum_{i=1}^{m} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b \right\} \tag{1}$$

und nennt die Kurve γ *rektifizierbar*, wenn $\mathscr{L}(\gamma) < \infty$.

(i) Beweisen Sie für eine injektive rektifizierbare Kurve $\gamma \in C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ die Existenz einer *Bogenlängenparametrisierung* $\Gamma : [0,\mathscr{L}(\gamma)] \to \mathbb{R}^n$, so dass $\mathscr{L}_{[0,s]}(\Gamma) = s$ für alle $s \in [0,\mathscr{L}(\gamma)]$ und mit

$$|\Gamma(s) - \Gamma(\sigma)| \leq |s - \sigma| \text{ für alle } s,\sigma \in [0,\mathscr{L}(\gamma)].$$

(ii) Zeigen Sie, dass für $\gamma \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\mathscr{L}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

(iii) Zeigen Sie für (eine nicht notwendig injektive) Kurve $\gamma \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ mit $|\gamma'(t)| > 0$ für alle $t \in [a,b]$ die Existenz einer Bogenlängenparametrisierung.

(iv)* Beweisen Sie Teil (i) ohne die Voraussetzung der Injektivität.

*Hinweis: Aufgaben mit Sternchen * liefern Zusatzpunkte.*

Aufgabe 2

[Knoten]

Sei $L > 0$. Zeigen Sie: Jede geschlossene Kurve $\gamma \in C^0(\mathbb{R}/(L\mathbb{Z}),\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, mit $\gamma|_{[0,L)}$ injektiv, definiert einen Knoten in $\mathbb{S}^n$ via $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^n$ definiert durch

$$f\left(e^{i\theta}\right) := \pi_s^{-1} \circ \gamma\left(\frac{L}{2\pi}\theta\right),$$

$\theta \in \mathbb{R}$, wobei $\pi_s : \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ mit $\pi_s(N) := \infty$ die stereographische Projektion bezeichne. N ist hier der Nordpol

$$N := (0,\ldots,0,1) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Aufgabe 3

[Ambiente Isotopie]

(i) Zeigen Sie, dass die Relation “ambient isotop” auf der Menge der Knoten $f : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$, $n \geq k$, eine Äquivalenzrelation ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Außenräume $\mathbb{S}^n \setminus f_0(\mathbb{S}^k)$ und $\mathbb{S}^n \setminus f_1(\mathbb{S}^k)$ zweier ambient isotoper Knoten $f_0, f_1 : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$ homoömorph sind.

(iii) Eine ambiente Isotopie $H : Y \times [0,1] \to Y \times [0,1]$ zwischen zwei Einbettungen $f_0, f_1 : X \to Y$ definiert auch eine (niveauerhaltende) Isotopie.

Hinweis: Zum Nachweis der Symmetrie in Teil (i) und für Teil (ii) dürfen Sie ohne Beweis das folgende topologische Resultat (vgl. [Hatcher: Algebraic Topology, Cor. 2B.4]) benutzen: Sei $\mathscr{M}^n$ eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit und $\mathscr{N}^n$ eine zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit, dann ist jede Einbettung $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ surjektiv. (In der vorliegenden Situation ist $\mathscr{M}^n = \mathscr{N}^n = \mathbb{S}^n$.)

Aufgabe 4

[Stetige Blätterungen]

(i) Jede injektive, reguläre Kurve $\gamma \in C^{1,1}(\mathbb{R}/(L\mathbb{Z}), \mathbb{R}^3)$ mit $|\gamma'| > 0$ besitzt eine offene, tubulare Umgebung $B_\varepsilon(\gamma)$, $\varepsilon = \varepsilon(\gamma) > 0$, sodass $\overline{B_\varepsilon(\gamma)}$ stetig geblättert ist durch Kreisscheiben

$$C_s := \overline{B_\varepsilon(\gamma(s))} \cap [\gamma'(s)]^\perp, \; s \in \mathbb{R}/(L\mathbb{Z}).$$

(ii) Für eine Kurve $\gamma \in C^{0,1}(\mathbb{R}/(L\mathbb{Z}), \mathbb{R}^3)$ mit $|\gamma'| = 1$ fast überall und $\gamma|_{[0,L)}$ injektiv gelte

$$\Delta[\gamma] := \inf_{s \neq t \neq \tau \neq s} R(\gamma(s), \gamma(t), \gamma(\tau)) > 0,$$

wobei $R(x,y,z)$ den Umkreisradius um $x,y,z \in \mathbb{R}^3$ bezeichne mit den Definitionen

$$R(x,y,z) = \begin{cases} \frac{|x-y|}{2}, & y = z \text{ oder } x = z \\ \infty, & x \neq y \neq z \neq x \text{ sind kollinear.} \end{cases}$$

Dann ist die stetige Blätterung für die Umgebung $\overline{B_\varepsilon(\gamma)}$ aus (i) möglich für alle $\varepsilon \in (0, \Delta[\gamma])$.

(iii) Sei $K^* \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte Menge, die stetig geblättert wird durch kompakte, konvexe Querschnitte $C_s \subset H_s$, $s \in \mathbb{R}/(L\mathbb{Z})$, $L > 0$, wobei durch H_s affine Hyperebenen im $\mathbb{R}^3$ gegeben sind. Dann gilt

$$\bigcup_{s \in \mathbb{R}/(L\mathbb{Z})} \partial C_s \subset \partial K^*.$$

Hier bezeichnet ∂C_s den Rand von C_s in der Ebene H_s.

Anmerkung: Aus (iii) und Proposition 1.19 A folgt dann

$$\bigcup_{s \in \mathbb{R}/(L\mathbb{Z})} \partial C_s = \partial K^*.$$

Aufgabe 5

[Isotopie durch C^1-Nähe]

Zeigen Sie, dass es zu jeder Kurve $\gamma \in C^1(\mathbb{R}/(L\mathbb{Z}),\mathbb{R}^3)$ mit $|\gamma'| > 0$ ein $\varepsilon = \varepsilon(\gamma) > 0$ gibt, sodass für jede weitere Kurve $\eta \in C^1(\mathbb{R}/(L\mathbb{Z}),\mathbb{R}^3)$ mit

$$\|\gamma - \eta\|_{C^1(\mathbb{R}/(L\mathbb{Z}),\mathbb{R}^3)} < \varepsilon$$

folgt: $\gamma \sim \eta$. Hierbei ist

$$\|\gamma\|_{C^1(\mathbb{R}/(L\mathbb{Z}),\mathbb{R}^3)} := \sup_{s\in\mathbb{R}/(L\mathbb{Z})} |\gamma(s)| + \sup_{s\in\mathbb{R}/(L\mathbb{Z})} |\gamma'(s)|.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass γ und η auf dieselbe Länge skaliert und nach Bogenlänge parametrisiert werden können, während deren C^1-Abstand weiterhin klein bleibt. Nun können Sie mit Resultaten aus der Vorlesung begründen, dass beide Kurven ambient isotop zu eingeschriebenen Polygonen sind, die wiederum kombinatorisch äquivalent sind.

Aufgabe 6

[Zahme Knotenklassen]

Sei $\mathscr{K}$ eine zahme Knotenklasse. Dann gibt es eine Kurve $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}/(L\mathbb{Z}),\mathbb{R}^3)$ beliebig vorgegebener Länge, sodass $[\gamma] = \mathscr{K}$.

Hinweis: Sie können die Ecken eines (regulär parametrisierten) Polygons in $\mathscr{K}$ so abrunden, dass Sie einen $C^{1,1}$-Vertreter in derselben Klasse erhalten. Einen glatten Vertreter kann man mit einer anschließenden Faltung und Aufgabe 5 erhalten, welchen man dann auf die gewünschte Länge skaliert.