Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Bastian Käfer

# Übungen zur Vorlesung
# Gradientenflüsse in metrischen Räumen
# Serie 1 vom 18.4.2017
# Abgabedatum: 7.7.2017

---

## Aufgabe 1

**[Monotonie]**

Die Funktion $g \in C^0([0,\infty))$ erfülle

$$-\int_0^\infty g(t)\eta'(t)\,dt \le 0 \text{ für alle } \eta \in C_0^1((0,\infty)), \eta \ge 0. \tag{1}$$

(i) Zeigen Sie, dass $g$ auf $[0,\infty)$ monoton fallend ist.

(ii) Können Sie die Voraussetzungen an $g$ noch abschwächen und/oder den Raum der Testfunktionen $\eta$ in (1) noch kleiner wählen?

---

## Aufgabe 2

**[Konvexe Funktionen]**

Sei $\psi : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion auf einem offenen Intervall $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) Für $a < s < t < u < b$ hat man

$$\frac{\psi(t)-\psi(s)}{t-s} \le \frac{\psi(u)-\psi(s)}{u-s} \le \frac{\psi(u)-\psi(t)}{u-t}.$$

(ii) $\psi$ ist rechts- und linksseitig differenzierbar auf $(a,b)$ mit rechtssetigier Ableitung $\psi_R'(s) := \lim_{t\downarrow s}(\psi(t)-\psi(s))/(t-s)$ und linksseitiger Ableitung $\psi_L'(s) := \lim_{t\uparrow s}(\psi(t)-\psi(s))/(t-s)$, die in folgender Weise geordnet sind:

$$\psi_L'(s) \le \psi_R'(s) \text{ für alle } s \in (a,b).$$

(iii) Für $s,t \in (a,b)$ mit $s < t$ gilt $\psi_R'(s) \le \psi_L'(t)$, und falls $\psi$ in $s$ und $t$ differenzierbar ist, dann gilt insbesondere $\psi'(s) \le \psi'(t)$.

(iv) Falls $\psi$ differenzierbar auf $(a,b)$ ist, dann ist $\psi \in C^1((a,b))$.

---

## Aufgabe 3

**[ODE ohne Lipschitzbedingung]**

(i) Geben Sie verschiedene reellwertige Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$z'(t) = -z(t)^2, \text{ für } t \geq 0,$$

an, und diskutieren Sie das Existenzintervall und das Verhalten der Lösungen in Abhängigkeit von dem Vorzeichen des vorgegebenen Anfangswert $z(0) = a$.

(ii) Ersetzen Sie die rechte Seite der o.g. Differentialgleichung durch die Funktion $G(z(t))$, wobei

$$G(x) := \begin{cases} -x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ x^2 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

und vergleichen Sie die Lösungseigenschaften mit Ihren Erkenntnissen zu den Lösungen in Teil (i). Erklären Sie insbesondere qualitativ, warum nun globale Lösungen $z : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ für jeden Anfangswert existieren. Gilt das auch für jede andere stetige, monoton fallende Funktion $G$ auf der rechten Seite?

---

## Aufgabe 4

**[Zyklisch monoton]**

Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum und $\psi : \mathscr{H} \to \mathbb{R}$ konvex, und

$$\mathrm{Dom}(\partial\psi) := \{x \in \mathscr{H} : \partial\psi(x) \neq \emptyset\}.$$

Zeige, dass das Subdifferential $\partial\psi$ von $\psi$ *zyklisch monoton* ist, d.h. für alle ("zyklischen") endlichen Punktfolgen $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = z_0 \in \mathrm{Dom}(\partial\psi)$ und für jede Folge $y_1, y_2, \ldots, y_n$ mit $y_i \in \partial\psi(z_i)$ für $i = 1, \ldots, n$, gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \langle y_i, z_i - z_{i-1} \rangle_{\mathscr{H}} \geq 0.$$

---

## Aufgabe 5

**[Funktionräume mit metrischem Bild]**

Sei $\mathscr{M}$ ein metrischer Raum und $-\infty < a < b < +\infty$. Beweisen Sie die drei folgenden Inklusionen und zeigen Sie durch Beispiele die Echtheit dieser Inklusionen.

(i) $AC([a,b],\mathscr{M}) \subset C^0([a,b],\mathscr{M})$,

(ii) $C^{0,1}([a,b],\mathscr{M}) \subset AC([a,b],\mathscr{M})$,

(iii) $AC([a,b],\mathscr{M}) \subset BV([a,b],\mathscr{M})$.

Machen Sie sich darüberhinaus mit Beispielen klar, dass $BV([a,b],\mathscr{M})$ nicht in $C^0([a,b],\mathscr{M})$ enthalten ist, und $C^0([a,b],\mathscr{M})$ auch nicht in $BV([a,b],\mathscr{M})$.

---

## Aufgabe 6

**[Metrische Ableitung]**

Beweisen Sie die folgende Identität für eine Funktion $u \in AC([a,b],\mathscr{M})$:

$$\int_a^b |\dot{u}|(\tau)\,d\tau = \mathrm{Var}(u,[a,b]).$$

Hierbei ist $\mathscr{M}$ ein metrischer Raum und $-\infty < a < b < +\infty$, $\mathrm{Var}(u,[a,b])$ bezeichnet die Variation von $u$ auf $[a,b]$, und $|\dot{u}|$ die metrische Ableitung von $u$.

---

## Aufgabe 7

**[Unterhalbstetigkeit]**

Sei $\mathscr{M}$ ein metrischer Raum mit Metrik $d : \mathscr{M} \times \mathscr{M} \to [0,\infty)$. Zeigen Sie

(i) Sei $x \in \mathrm{dom}(\phi)$ einer eigentlichen Funktion $\phi : \mathscr{M} \to (-\infty,\infty]$. Dann ist $\phi$ genau dann unterhalbstetig, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$\phi(y) \geq \phi(x) - \varepsilon \qquad \text{für alle } y \in \mathscr{M} \text{ mit } d(y,x) \leq \delta.$$

(ii) $\phi$ ist auf $\mathscr{M}$ unterhalbstetig genau dann, wenn für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Subniveaumenge $\{x \in \mathscr{M} : \phi(x) \leq c\}$ abgeschlossen in $\mathscr{M}$ ist.

(iii) Falls $\mathscr{M}$ kompakt ist und $\phi$ unterhalbstetig auf $\mathscr{M}$, dann gibt es eine Konstante $C \geq 0$, so dass $\phi \geq -C > -\infty$ auf $\mathscr{M}$ ist, und $\phi$ nimmt sein Minimum auf $\mathscr{M}$ an.

---