Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel

# Übungen zur Vorlesung Geometrische Analysis I – Rektifizierbare Mengen und Menger Krümmung in der harmonischen Analysis und Variationsrechnung Serie 1 vom 4.11.2008

---

## Aufgabe 1 **[Mengen]**

Sei $X$ eine Menge und $P(X)$ ihre Potenzmenge, d.h. die Menge aller Teilmengen von $X$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Falls für $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset P(X)$ die Beziehung $E_i \subset E_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ oder die Beziehung $E_i \supset E_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, dann ist

$$\liminf_{j\to\infty} E_j = \limsup_{j\to\infty} E_j (= \lim_{j\to\infty} E_j).$$

(ii) Falls für $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset P(X)$ die Beziehung $E_i \subset E_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, dann hat man

$$E_l = E_1 \cup \bigcup_{k=2}^{l} (E_k \setminus E_{k-1}) \qquad \text{für alle } \; l \in \mathbb{N}.$$

(iii) Falls für $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset P(X)$ die Beziehung $A_k \subset U_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, dann hat man

$$\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k \setminus \bigcup_{l=1}^{\infty} A_l\right] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (U_k \backslash A_k) \qquad \text{und} \qquad \left[\bigcap_{j=1}^{k} U_j \setminus \bigcap_{j=1}^{k} A_j\right] \subset \bigcup_{j=1}^{k} (U_j \backslash A_j) \; \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

(iv) Falls $X$ ein metrischer Raum mit Metrik $d$ ist, dann gilt für alle abgeschlossenen Mengen $C \subset X$

$$C = \{x \in X : d(x, C) = 0\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{x \in X : d(x, C) < \frac{1}{j}\}.$$

---

## Aufgabe 2 **[$\sigma$-Algebren]**

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Sei $X$ eine Menge mit Potenzmenge $P(X)$ und $\mathscr{S} \subset P(X)$ eine $\sigma$-Algebra auf $X$. Dann gilt für alle $E_j \subset \mathscr{S}$, dass auch $\liminf_{j\to\infty} E_j \in \mathscr{S}$ und $\limsup_{j\to\infty} E_j \in \mathscr{S}$.

(ii) Sei $X$ ein topologischer Raum und $\mathscr{B} \subset P(X)$ die Borel-$\sigma$-Algebra auf $X$. Dann enthält $\mathscr{B}$ alle abzählbaren Vereinigungen abgeschlossener Mengen (sogenannte $\mathcal{F}_\sigma$-*Mengen*) und alle abzählbaren Schnitte offener Mengen (sogenannte $\mathcal{G}_\delta$-*Mengen*).

(iii) Mit den Voraussetzungen aus Teil (ii) gilt: $\mathscr{B}$ ist die kleinste $\sigma$-Algebra auf $X$, die alle abgeschlossenen Mengen enthält.

---

## Aufgabe 3 **[Approximation regulärer Maße]**

$\mu$ sei ein äußeres Borel-reguläres Maß auf einem metrischen Raum $(X,d)$, wobei $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$ mit offenen Teilmengen $V_j \subset X$ und $\mu(V_j) < \infty$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Weiterhin gelte für alle $A \subset X$

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U, \text{ wobei } U \subset X \text{ offen}\}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $\mu$-messbaren Teilmengen von $X$ gilt

$$\mu(A) = \sup\{\mu(C) : C \subset A, \text{ wobei } C \subset X \text{ abgeschlossen}\}.$$

---

## Aufgabe 4 **[Stetigkeit von Maßen]**

Sei $(X, \mathscr{S}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass für

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots, \quad F_j \in \mathscr{S} \text{ für alle } j \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \mu(F_1) < \infty,$$

gilt:

$$\mu(\liminf_{j\to\infty} F_j) = \liminf_{j\to\infty} \mu(F_j).$$

*Hinweis: Mit*

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = F_1 \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} (F_1 \setminus F_k)$$

*erhalten Sie eine Darstellung des* $\liminf_{j\to\infty} F_j$ *mit Hilfe der aufsteigenden Mengen* $E_k := F_1 \setminus F_k$*, um dann den in der Vorlesung bewiesenen Teil (i) des Satzes 1.4 anwenden zu können.*

---