Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel

Übungen zur Vorlesung Geometrische Analysis I – Rektifizierbare Mengen und Menger Krümmung in der harmonischen Analysis und Variationsrechnung Serie 2 vom 21.11.2008

Aufgabe 1 [$\mathscr{H}^s$ auf $\mathbb{R}^n$]

Beweisen Sie:

(i) $\mathscr{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathscr{H}^s(A)$ für alle $\lambda > 0$ und alle $A \subset \mathbb{R}^n$, wobei

$$\lambda A := \{x \in \mathbb{R}^n : \text{ es gibt } a \in A \text{ mit } x = \lambda a\}.$$

(ii) $\mathscr{H}^s(i(A)) = \mathscr{H}^s(A)$ für alle Isometrien (Drehungen, Spiegelungen und Translationen) $i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 2 [Lebesgue Maß $\mathscr{L}^n$ auf $\mathbb{R}^n$]

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Das n-dimensionale Lebesgue $\mathscr{L}^n : P(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ ist ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}^n$.

(ii) Für einen Koordinatenblock $C = \bigtimes_{i=1}^n [a_i, b_i)$, $a_i < b_i$ für $i = 1, \ldots, n$, gilt $\mathscr{L}^n(C) = \text{Vol}(C)$.

(iii) $\mathscr{L}^n$ ist ein metrisches (äußeres) Maß auf $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3 **[Existenz der Bogenlängenparametrisierung]**

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $a < b$, eine rektifizierbare (nicht notwendig doppelpunktfreie) Kurve mit Länge $\mathscr{L}(\gamma) > 0$. Zeigen Sie, dass es eine Bogenlängenparametrisierung $\Gamma : [0, \mathscr{L}(\gamma)] \to \mathbb{R}^n$ gibt, die $\Gamma([0, \mathscr{L}(\gamma)]) = \gamma([a,b])$, sowie

$$\mathscr{L}_{[0,s]}(\Gamma) = s \qquad \text{für alle} \quad s \in [0, \mathscr{L}(\gamma)],$$

und

$$|\Gamma(s) - \Gamma(\sigma)| \leq |s - \sigma| \qquad \text{für alle} \quad s, \sigma \in [0, \mathscr{L}(\gamma)]$$

erfüllt.

Hinweis: Vergleichen Sie mit Lemma 2.13 der Vorlesung und schneiden Sie geeignet Konstanzintervalle von γ heraus.

Aufgabe 4 **[$\mathscr{H}^1$ entlang von bogenlängenparametrisierten Jordankurven]**

Sei $\Gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^n$, $0 < L < \infty$, eine nach der Bogenlänge parametrisierte Jordankurve.

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion $\mathscr{H}^1(\Gamma(\cdot)) : P([0, L]) \to [0, \infty)$ ein äußeres Borel-Maß ist.

(ii) Ist $\mathscr{H}^1(\Gamma(\cdot)) : P([0, L]) \to [0, \infty)$ Borel-regulär?

Hinweis: Beachten Sie meine Hinweise zu Korollar 2.15 der Vorlesung. Insbesondere stellt sich für (ii) die Frage, ob $\mathscr{L}^1$-messbare Mengen $E \subset [0, L]$ ebenfalls $\mathscr{H}^1(\Gamma(\cdot))$-messbar sind.
