Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel

Übungen zur Vorlesung Geometrische Analysis I – Rektifizierbare Mengen und Menger Krümmung in der harmonischen Analysis und Variationsrechnung Serie 3 vom 2.1.2009

Aufgabe 9 **[Cantormenge in $\mathbb{R}$]**

Sei $C \subset [0,1] \subset \mathbb{R}$ die in Beispiel 2.16 (i) der Vorlesung konstruierte Cantormenge. Beweisen Sie, dass es für die Abschätzung $\mathscr{H}^{\log 2/\log 3}(C) \geq 1$ genügt, für beliebige abgeschlossene Intervalle $J_1, J_2, \ldots, J_N \subset \mathbb{R}$ mit

$$C \subset \bigcup_{k=1}^{N} J_k$$

die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{N} (\operatorname{diam} J_k)^{\log 2/\log 3} \geq 1$$

zu zeigen.

Aufgabe 10 **[Dichten auf Teilmengen]**

Beweisen Sie Korollar 3.4 der Vorlesung: Sei μ ein Borel-reguläres äußeres Maß auf einem metrischen Raum (X, d). Dann gilt für alle $A, B \in \mathscr{M}(\mu)$ mit $A \subset B$ und $\mu(B) < \infty$:

$$\theta^{*s}(\mu, A, x) = \theta^{*s}(\mu, B, x) \qquad \text{und} \qquad \theta_*{}^s(\mu, A, x) = \theta_*{}^s(\mu, B, x)$$

für $\mathscr{H}^s$-fast alle $x \in A$.

Aufgabe 11 **[δ- und ∞-Approximation des Hausdorff-Maßes]**

Sei $\delta > 0$ und (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass für alle $A \subset X$ mit $\operatorname{diam} A \leq \delta$ die Identität $\mathscr{H}^s_\delta(A) = \mathscr{H}^s_\infty(A)$ gilt.

Aufgabe 12 **[Cantormenge in $\mathbb{R}$ mit vorgegebener Hausdorff-Dimension]**

Konstruieren Sie für einen beliebigen Parameter $k \in (0, 1/2)$ eine Cantormenge $D_k \subset [0,1]$ mit

$$\mathscr{H}^{\log 2/\log(1/k)}(D_k) = 1.$$

Hinweis: Gehen Sie ähnlich wie in Beispiel 2.16 (i) der Vorlesung vor, indem Sie statt des mittleren Drittels nun einen Anteil $1 - 2k$ aus der Mitte jedes Intervalls E_j entfernen.
