Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel

# Übungen zur Vorlesung
# Geometrische Analysis I – Rektifizierbare Mengen und Menger Krümmung in der harmonischen Analysis und Variationsrechnung
# Serie 4 vom 7.1.2009

---

## Aufgabe 13 **[Messbare Funktionen I]**

Beweisen Sie Lemma 3.9 der Vorlesung: Sei $\mathscr{S}$ eine $\sigma$-Algebra auf der Menge $X$. Dann ist die Funktion $f : X \to \mathbb{R}^* := [-\infty, \infty]$ genau dann $\mathscr{S}$-messbar, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $\{x \in X : f(x) \leq c\} \in \mathscr{S}$ für alle $c \in \mathbb{R}$,

(ii) $\{x \in X : f(x) > c\} \in \mathscr{S}$ für alle $c \in \mathbb{R}$,

(iii) $\{x \in X : f(x) \geq c\} \in \mathscr{S}$ für alle $c \in \mathbb{R}$,

(iv) $\{x \in X : f(x) < c\} \in \mathscr{S}$ für alle $c \in \mathbb{R}$.

---

## Aufgabe 14 **[Messbare Funktionen II]**

Beweisen Sie Proposition 3.10 der Vorlesung: Seien $\mathscr{S}$ eine $\sigma$-Algebra auf der Menge $X$, $f, g : X \to \mathbb{R}^*$ $\mathscr{S}$-messbar und $k \in \mathbb{R}$. Dann sind auch folgende Funktionen (falls definiert) $\mathscr{S}$-messbar:

$$f + k, \quad kf, \quad f + g, \quad f^2, \quad fg, \quad 1/f,$$
$$\max\{f, g\}, \quad \min\{f, g\}, \quad f_+ := \max\{0, f\}, \quad f_- := \min\{0, f\}, \quad |f|.$$

---

## Aufgabe 15 **[Messbare Funktionen III]**

Beweisen Sie Proposition 3.11 der Vorlesung: Seien $\mathscr{S}$ eine $\sigma$-Algebra auf der Menge $X$, $f_1, f_2, \ldots : X \to \mathbb{R}^*$ abzählbar viele $\mathscr{S}$-messbare Funktionen. Dann sind auch

$$\sup_n f_n, \quad \inf_n f_n, \quad \limsup_n f_n \quad \text{und} \quad \liminf_n f_n$$

$\mathscr{S}$-messbar. Falls $f_n \to f$ punktweise, dann ist auch $f$ $\mathscr{S}$-messbar; insbesondere also, wenn $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$, ist auch $lim_{n\to\infty} f_n$ $\mathscr{S}$-messbar.

---

## Aufgabe 16 **[Eindimensionale Cantormenge in $\mathbb{R}^2$ ist nicht 1-rektifizierbar]**

Zeigen Sie, dass die in Beispiel 2.16 (ii) der Vorlesung konstruierte Cantormenge $E \subset [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ mit $\dim_{\mathscr{H}}(E) = 1$ $\mathscr{H}^1$-fast überall *keine* approximative Tangente besitzt.

---