Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Bastian Käfer

Übungen zur Vorlesung
Möbius-invariante Energien
Serie 1 vom 3.11.2020
Abgabedatum: 24.11.2020

Aufgabe 1

[Lineare Abbildungen & Orthogonale Projektionen]

Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume mit Skalarprodukten $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ bzw. $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$, $\dim V = k$ und $\mathrm{Hom}(V,W)$ sei die Menge aller linearer Abbildungen $f : V \to W$. Die zu $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ *adjungierte Abbildung* $f^* \in \mathrm{Hom}(W,V)$ ist definiert durch die Beziehung $\langle f(v),w\rangle_W = \langle v, f^*(w)\rangle_V$ für alle $v \in V, w \in W$.

(i) Zeigen Sie, dass durch $f \bullet g := \mathrm{trace}(f^* \circ g)$ für $f,g \in \mathrm{Hom}(V,W)$ ein Skalarprodukt auf $\mathrm{Hom}(V,W)$ definiert ist, und dass die dadurch induzierte Norm $|f| := \sqrt{f \bullet f}$ die folgende Abschätzung erfüllt.

$$\|f\| \le |f| \le \sqrt{k}\|f\|,$$

wobei $\|f\| := \sup_{\|v\|_V \le 1} \|f(v)\|_W$ die Operatornorm von f bezeichnet.

(ii) Die orthogonale Projektion $\Pi_F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auf einen m-dimensionalen Unterraum $F \in \mathscr{G}(n,m)$ für $1 \le m \le n$ ist charakterisiert durch die Identitäten $\Pi_F \circ \Pi_F = \Pi_F$, $(\Pi_F)^* = \Pi_F$, und $\Pi_F(\mathbb{R}^n) = F$. Zeigen Sie:

$$|\Pi_E - \Pi_F|^2 = 2\Pi_E \bullet \Pi_{F^\perp} = 2\Pi_{E^\perp} \bullet \Pi_F = |\Pi_{E^\perp} - \Pi_{F^\perp}|^2 \quad \text{für } E,F \in \mathscr{G}(n,m).$$

(iii) Zeigen Sie, dass $\Pi_E \bullet \Pi_F = |\Pi_E \circ \Pi_F|^2$ für $E \in \mathscr{G}(n,k)$ und $F \in \mathscr{G}(n,m)$.

(iv) Zeigen Sie für $E,F \in \mathscr{G}(n,m)$:

$$\sphericalangle(E,F) = \|\Pi_{E^\perp} \circ \Pi_F\| = \|\Pi_E \circ \Pi_{F^\perp}\| = \|\Pi_{F^\perp} \circ \Pi_E\| = \|\Pi_F \circ \Pi_{E^\perp}\| = \|\Pi_{E^\perp} - \Pi_{F^\perp}\|.$$

(v) Zeigen Sie für $E,F \in \mathscr{G}(n,m)$ und $f \in \mathrm{Hom}(E,E^\perp)$ die Ungleichung

$$2|\Pi_F \bullet (f \circ \Pi_E)|^2 \le |\Pi_E - \Pi_F|^2 |f|^2.$$

(vi) Zeigen Sie für $E \in \mathscr{G}(n,m)$, $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(E,E^\perp)$ und $F_i := (\mathrm{Id} + f_i)(E)$, $i = 1,2$, die Ungleichungen

$$\|\Pi_{F_1} - \Pi_{F_2}\| \le \|f_1 - f_2\|,$$
$$(1 - \|\Pi_{F_1} - \Pi_E\|^2)\|f_1 - f_2\|^2 \le (1 + \|f_2\|^2)\|\Pi_{F_1} - \Pi_{F_2}\|^2.$$

Aufgabe 2

[Orthonormalbasen und Winkel]

Sei $1 \leq m \leq n$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeiche das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Für Orthonormalbasen $\{e_1, \ldots, e_m\}$ von $E \in \mathscr{G}(n,m)$ und $\{f_1, \ldots, f_m\}$ von $F \in \mathscr{G}(n,m)$ mit

$$|e_i - f_i| \leq \chi \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, m,$$

gilt $\sphericalangle(E,F) \leq 2m\chi$.

(ii) Für $\rho > 0$, $\varepsilon \in (0,1)$, und $\delta \in (0,1)$ sei $\{v_1, \ldots, v_m\}$ eine $(\rho, \varepsilon, \delta)$-Basis von $V \in \mathscr{G}(n,m)$, d.h.

$$(1-\varepsilon)\rho \leq |v_i| \leq (1+\varepsilon)\rho \quad \text{für } i = 1, \ldots, m,$$
$$|\langle v_i, v_j \rangle| \leq \delta\rho^2 \quad \text{für } i \neq j.$$

Dann existiert eine Konstante $C_2 = C_2(m)$ und eine $(\rho, 0, 0)$-Basis $\{f_1, \ldots, f_m\}$ von V, so dass

$$|v_i - f_i| \leq (\varepsilon + C_2\delta)\rho \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, m.$$

Hinweis: Benutzen Sie für Teil (ii) die Beweisskizze aus der Vorlesung.