Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Bastian Käfer

Übungen zur Vorlesung
Möbius-invariante Energien
Serie 2 vom 21.12.2020
Abgabedatum: 25.1.2021

Aufgabe 3

[Tangentialsphären]

Seien $\alpha, M > 0$, $\Sigma \in \mathscr{A}^m(\alpha, M)$ und $x, y \in \Sigma$ mit $x \neq y$. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Tangentialsphäre $\mathbb{S}^m(x,x,y)$ gibt (vgl. Definition 5.2 der Vorlesung).

Aufgabe 4

[Darstellung des konformen Winkels]

Seien $\alpha, M > 0$, $\Sigma \in \mathscr{A}^m(\alpha, M)$ und $x, y \in \Sigma$ mit $x \neq y$.

(i) Zeigen Sie:

$$\sphericalangle\big(\mathbb{S}^m(x,x,y), \mathbb{S}^m(y,y,x)\big) = \sphericalangle\big(H(x), \mathscr{R}_{xy}(H(y))\big) = \sphericalangle\big(\mathscr{R}_{xy}(H(x)), H(y)\big),$$

wobei $\mathscr{R}_{xy} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$z \mapsto z - \frac{2}{|x-y|^2}\langle z, x-y\rangle \cdot (x-y) \qquad \text{für } z \in \mathbb{R}^n$$

die Reflexion an der Hyperebene $(x-y)^\perp \in \mathscr{G}(n, n-1)$ ist.

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe von Lemma 2.2 die Identität

$$\sphericalangle\big(\mathscr{R}_{xy}(H(x)), H(y)\big) = \sup_{e \in H(x) \cap \mathbb{S}^{n-1}} |\Pi_{H(y)^\perp}(\mathscr{R}_{xy}(e))|.$$

Aufgabe 5

[Invarianz des Winkels unter Inversion]

Sei $a \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$. Dann ist die Inversion $T : \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \to \mathbb{R}^n$ an der Hypersphäre $\partial B_r(a)$ gegeben durch

$$T(x) := a + \left(\frac{r}{|x-a|}\right)^2 \cdot (x-a).$$

Zeigen Sie, dass (klassische) Winkel zwischen zwei Vektoren unter T erhalten bleiben.
