Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Richard Flegel
Nicolas Freches

Übungen zur Vorlesung
Geometrische Knotentheorie
Serie 1 vom 20.11.2024
Abgabedatum: Aufgaben 2, 3 und 4 am 6.12.2024
Aufgaben 1 und 5 am 20.12.2024

Aufgabe 1

[Bogenlängenparametrisierung]

Für $-\infty < a < b < \infty$ und eine Kurve $\gamma \in C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ definiert man die *Länge* $\mathscr{L}(\gamma)$ durch

$$\mathscr{L}(\gamma) = \mathscr{L}_{[a,b]}(\gamma) := \sup\left\{\sum_{i=1}^{m} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b\right\} \tag{1}$$

und nennt die Kurve γ *rektifizierbar*, wenn $\mathscr{L}(\gamma) < \infty$.

(i) Beweisen Sie für eine injektive rektifizierbare Kurve $\gamma \in C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ die Existenz einer *Bogenlängenparametrisierung* $\Gamma : [0,\mathscr{L}(\gamma)] \to \mathbb{R}^n$, so dass $\mathscr{L}_{[0,s]}(\Gamma) = s$ für alle $s \in [0,\mathscr{L}(\gamma)]$ und mit

$$|\Gamma(s) - \Gamma(\sigma)| \leq |s - \sigma| \text{ für alle } s,\sigma \in [0,\mathscr{L}(\gamma)].$$

(ii) Zeigen Sie, dass für $\gamma \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\mathscr{L}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

(iii) Zeigen Sie für (eine nicht notwendig injektive) Kurve $\gamma \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ mit $|\gamma'(t)| > 0$ für alle $t \in [a,b]$ die Existenz einer Bogenlängenparametrisierung.

(iv)* Beweisen Sie Teil (i) ohne die Voraussetzung der Injektivität.

*Hinweis: Aufgaben mit Sternchen * liefern Zusatzpunkte.*

Aufgabe 2

[Knoten]

Sei $L > 0$. Zeigen Sie: Jede geschlossene Kurve $\gamma \in C^0(\mathbb{R}/(L\mathbb{Z}),\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, mit $\gamma|_{[0,L)}$ injektiv, definiert einen Knoten in $\mathbb{S}^n$ via $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^n$ definiert durch

$$f\left(e^{i\theta}\right) := \pi_s^{-1} \circ \gamma\left(\frac{L}{2\pi}\theta\right),$$

$\theta \in \mathbb{R}$, wobei $\pi_s : \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ mit $\pi_s(N) := \infty$ die stereographische Projektion bezeichne. N ist hier der Nordpol

$$N := (0,\ldots,0,1) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Aufgabe 3

[Ambiente Isotopie]

(i) Zeigen Sie, dass die Relation “ambient isotop” auf der Menge der Knoten $f : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$, $n \geq k$, eine Äquivalenzrelation ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Außenräume $\mathbb{S}^n \setminus f_0(\mathbb{S}^k)$ und $\mathbb{S}^n \setminus f_1(\mathbb{S}^k)$ zweier ambient isotoper Knoten $f_0, f_1 : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$ homoömorph sind.

(iii) Eine ambiente Isotopie $H : Y \times [0,1] \to Y \times [0,1]$ zwischen zwei Einbettungen $f_0, f_1 : X \to Y$ definiert auch eine (niveauerhaltende) Isotopie.

Hinweis: Zum Nachweis der Symmetrie in Teil (i) und für Teil (ii) dürfen Sie ohne Beweis das folgende topologische Resultat (vgl. [Hatcher: Algebraic Topology, Cor. 2B.4]) benutzen: Sei $\mathscr{M}^n$ eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit und $\mathscr{N}^n$ eine zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit, dann ist jede Einbettung $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ surjektiv. (In der vorliegenden Situation ist $\mathscr{M}^n = \mathscr{N}^n = \mathbb{S}^n$.)

Aufgabe 4

[Knotenäquivalenz]

(i) Zeigen Sie, dass die Relation “äquivalent” auf der Menge der Knoten $f : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$, $n \geq k$, eine Äquivalenzrelation ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Außenräume $\mathbb{S}^n \setminus f_0(\mathbb{S}^k)$ und $\mathbb{S}^n \setminus f_1(\mathbb{S}^k)$ zweier äquivalenter Knoten $f_0, f_1 : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$ homoömorph sind.

(iii)* Zeigen Sie, dass für zwei äquivalente bogenlängenparametrisierte Knoten $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^3$ gilt: Entweder sind γ_1 und γ_2 ambient isotop, oder γ_1 ist zu dem Spiegelbild γ_2^* von γ_2 ambient isotop, wobei γ_2^* aus γ_2 durch Spiegelung an einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ hervorgeht.

*Hinweis: Aufgaben mit Sternchen * ergeben Zusatzpunkte.*

Aufgabe 5

[C^1-Knoten]

Sei $\eta \in C^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^3)$ ein Knoten und $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ein Parameter. Zeigen Sie, dass die folgende Größe strikt positiv ist:

$$\overline{\delta}_t := \sup\left\{\delta > 0 : \eta^{-1}\big(B_d(\eta(t))\big) \text{ ist zusammenhängend für alle } d \in (0,\delta]\right\}.$$
