

Übungen zur Vorlesung
Neues aus der Geometrische Knotentheorie
Serie 1 vom 19.5.2021
Abgabedatum: 18.6.2021

Aufgabe 1

[Lokale Darstellungen von glatten Funktionen zwischen Mannigfaltigkeiten]

Seien \mathcal{M} und \mathcal{N} zwei randlose C^k -Mannigfaltigkeiten, und $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ eine Abbildung der Klasse C^k . Zeigen Sie, dass jede lokale Darstellung von f ebenfalls von der Klasse C^k ist.

Hinweis: Nutzen Sie für den Übergang von einer Karte zur anderen in der Urbild- und in der Zielmannigfaltigkeit die entsprechende Glattheit der Kartenwechsel.

Aufgabe 2

[Torus als abstrakte Mannigfaltigkeit]

Das *periodische Intervall* $\mathbb{R}/\mathbb{Z} := \{x + \mathbb{Z} : x \in \mathbb{R}\}$ kann man als Menge aller Äquivalenzklassen $[x]$ reeller Zahlen x auffassen, wobei zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ äquivalent sind, falls es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $x = y + k$. Zeigen Sie, dass sowohl \mathbb{R}/\mathbb{Z} als auch der Torus $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ eine glatte kompakte (abstrakte) Mannigfaltigkeit ist.

Hinweis: Sie können z.B. die Invertierbarkeit der stetigen Projektion $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit $\pi(x) := [x]$ für $x \in \mathbb{R}$ auf genügend kleinen offenen Intervallen $I \subset \mathbb{R}$ nutzen, um lokale Kartenabbildungen $\psi := (\pi|_I)^{-1}: \pi(I) \rightarrow I$ mit glatten (sogar analytischen) Kartenwechseln zu konstruieren. Eine für den Nachweis der Stetigkeit geeignete Distanzfunktion auf \mathbb{R}/\mathbb{Z} ist z.B. $|x|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} := \min_{k \in \mathbb{Z}} |x + k|$.

Aufgabe 3

[Die Einheitssekantenabbildung e auf dem Torus]

Für zwei disjunkte (jeweils nicht notwendig injektive) Kurven $\gamma, \eta \in C^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^3)$ definiert

$$e(s, t) := \frac{\gamma(s) - \eta(t)}{|\gamma(s) - \eta(t)|} \quad \text{für } (s, t) \in \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

die zu γ und η gehörige *Einheitssekantenabbildung*.

(i) Zeigen Sie, dass für $(s, t) \in \mathbb{T}^2$ gilt:

$$|\gamma(s) - \eta(t)| \partial_s e(s, t) = \Pi_{e(s, t)^\perp}(\gamma'(s)) \quad (1)$$

$$|\gamma(s) - \eta(t)| \partial_t e(s, t) = \Pi_{e(s, t)^\perp}(\eta'(t)). \quad (2)$$

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\langle e, \partial_s e \wedge \partial_t e \rangle = \det(e | \partial_s e | \partial_t e) = \pm |\partial_s e \wedge \partial_t e|,$$

wobei das positive Vorzeichen gilt, falls die Basis $\{e, \partial_s e, \partial_t e\}$ des \mathbb{R}^3 positiv orientiert ist, d.h. dieselbe Orientierung hat, wie die Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ des \mathbb{R}^3 .

- (iii) Zeigen Sie, dass für fast alle regulären Werte $v \in \mathbb{S}^2$ von e auch der Antipodenpunkt $-v \in \mathbb{S}^2$ ein regulärer Wert von e ist.
- (iv) Sei $v \in \mathbb{S}^2$ ein regulärer Wert von e . Zeigen Sie, dass das Urbild $e^{-1}(v)$ aus höchstens endlich vielen Punkten besteht. Zeigen Sie weiterhin, dass eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{S}^2$ von v und endlich viele offene Teilmengen $\Omega_1, \dots, \Omega_N \subset \mathbb{T}^2$ existieren, so dass e jede Menge Ω_i diffeomorph auf U abbildet.
- (v) Zeigen Sie, dass

$$\langle e, \partial_s e \wedge \partial_t e \rangle(s, t) = \frac{\langle \gamma(s) - \eta(t), \gamma'(s) \wedge \eta'(t) \rangle}{|\gamma(s) - \eta(t)|^3}.$$

Hinweis: Beim Nachweis von (iv) nutzen Sie zunächst die Kompaktheit von \mathbb{T}^2 . Für den zweiten Teil können Sie sich über lokale Karten in der \mathbb{S}^2 und in \mathbb{T}^2 auf die Standardvariante des Umkehrsatzes im \mathbb{R}^2 zurückziehen.

Aufgabe 4

[Invariante Funktionale]

- (i) Sei $U \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge und $F \in C^0(U)$ mit der Homogenitätsbeziehung $F(x, y, \lambda p, \mu q) = \lambda \mu F(x, y, p, q)$ für alle $(x, y, p, q) \in U$ und alle $\lambda, \mu > 0$. Seien $\gamma, \eta \in C^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^3)$ so dass $\gamma(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \eta(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \gamma'(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \eta'(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset U$. Zeigen Sie: Dann gilt für das Funktional

$$\mathcal{F}_{\mathbb{T}^2}(\gamma, \eta) := \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} F(\gamma(s), \eta(t), \gamma'(s), \eta'(t)) ds dt$$

die *Parameterinvarianz*, d.h. für orientierungserhaltende Diffeomorphismen $\phi : \mathbb{R}/\ell\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $\psi : \mathbb{R}/\tau\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ gilt

$$\mathcal{F}_{\mathbb{T}^2}(\gamma, \eta) = \mathcal{F}_{\mathbb{T}^2}(\gamma \circ \phi, \eta \circ \psi),$$

wobei $\mathbb{T}^2 := (\mathbb{R}/\ell\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\tau\mathbb{Z})$ der unter $\phi \times \psi$ transformierte Torus ist.

- (ii) Zeige, dass das Gaußsche Link-Integral parameterinvariant ist.
- (iii) Zeige, dass das Gaußsche Link-Integral invariant unter Reskalierungen $(\gamma, \eta) \mapsto (R\gamma, R\eta)$ für $R > 0$ ist.

Aufgabe 5

[Erste Variation des Gaußschen Link-Integrals]

- (i) Berechnen Sie für beliebige (nicht notwendig geschlossene) Kurven $\gamma, \eta, \phi, \psi \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^3)$ mit $\gamma([0, 1]) \cap \eta([0, 1]) = \emptyset$ die *erste Variation*

$$\delta \text{Lk}(\gamma, \eta; \phi, \psi) := \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \text{Lk}(\gamma + \varepsilon\phi, \eta + \varepsilon\psi),$$

des Gaußschen Link-Integrals

$$\text{Lk}(\gamma, \eta) := \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\langle \gamma(s) - \eta(t), \gamma'(s) \wedge \eta'(t) \rangle}{|\gamma(s) - \eta(t)|^3} ds dt.$$

- (ii) Weisen Sie mir dem Ergebnis aus (i) nach, dass die erste Variation $\delta \text{Lk}(\gamma, \eta; \phi, \psi)$ für geschlossene Kurven $\gamma, \eta, \phi, \psi \in C^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^3)$ mit $\gamma(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \eta(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \emptyset$ verschwindet.

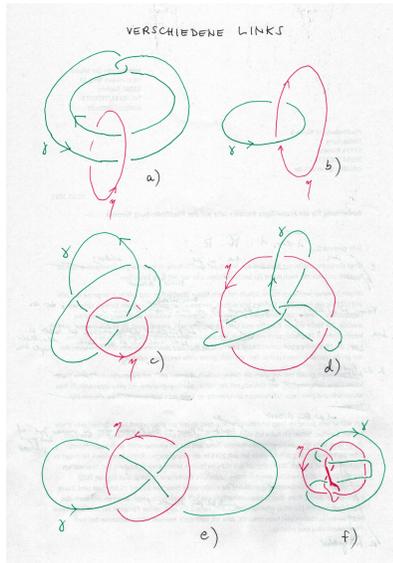


Abbildung 1: Verschiedene Links.

Hinweis: Sie können Teil (v) der Aufgabe 3 benutzen und dann die Trilinearität und die Schiefsymmetrie des Spatprodukts für die Produktregel beim Ableiten. Zusätzlich hilft eine partielle Integration, um Randterme zu erzeugen, und die Tatsache, dass e als Einheitsvektorfeld senkrecht auf seinen partiellen Ableitungen steht.

Aufgabe 6

[Verschlingungszahl und Reidemeister-Bewegungen]

Es gibt drei Typen von *Reidemeister-Bewegungen*, die in Knoten- und Linkdiagrammen die Überkreuzungszahlen modifizieren, ohne den Knoten- oder Linktyp zu verändern; siehe Abbildung 2.

- (i) Bestimmen Sie mit der Zählmethode die Verschlingungszahl der sechs Links in Abbildung 1.
- (ii) Zeigen Sie unter Benutzung der Zählmethode allgemein, dass die Verschlingungszahl unter allen Reidemeister-Bewegungen invariant ist.
- (iii) Zeigen Sie, dass das Link-Diagramm in Abbildung 1 f) durch Reidemeister-Bewegungen in das Link-Diagramm in Abbildung 3 überführbar ist.

Hinweis: Machen Sie sich klar, dass für Teil (ii) nur die Reidemeister-Bewegungen betrachtet werden müssen, die die Teilstränge verschiedener Komponenten des Links modifizieren.

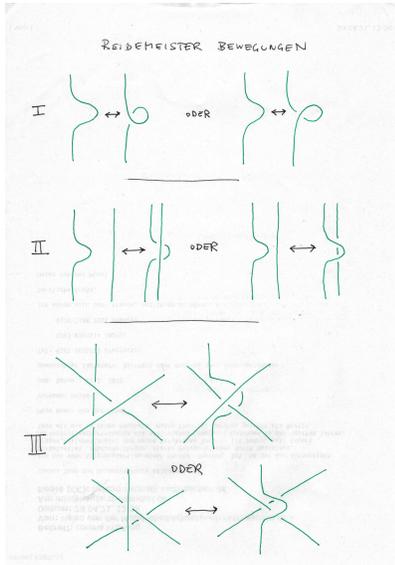


Abbildung 2: Die drei Reidemeister-Bewegungen.

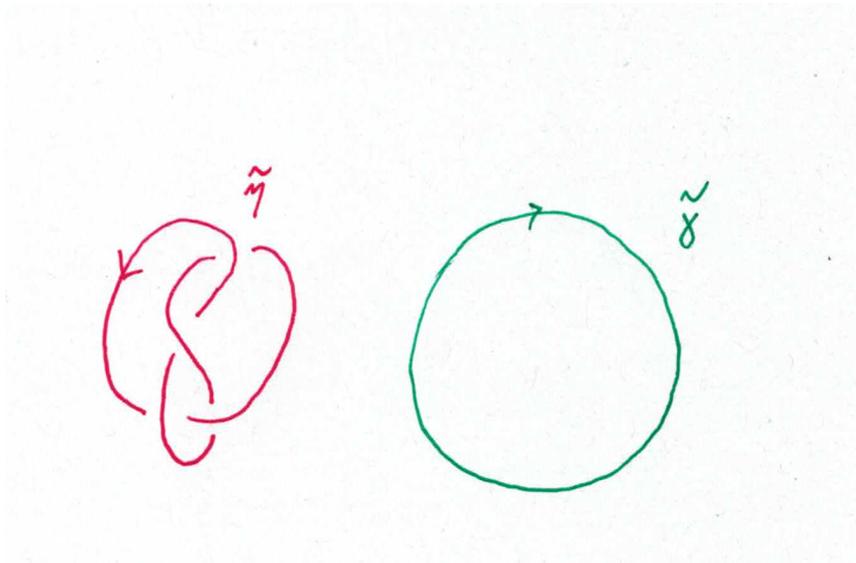


Abbildung 3: Ein link mit zwei völlig getrennten Komponenten.