Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Daniel Steenebrügge

Übungen zur Vorlesung
Neues aus der Geometrische Knotentheorie
Serie 2 vom 15.6.2021
Abgabedatum: 9.7.2021

Aufgabe 7

[Writhe]

Sei $\gamma \in C^0(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie:

(i) Der Writhe $\mathrm{Wr}[\cdot]$ ist invariant unter Translationen $\gamma \mapsto \gamma + a$ für einen Vektor $a \in \mathbb{R}^3$, unter Rotationen $\gamma \mapsto R\gamma$ für eine Rotation $R \in SO(3)$, und invariant unter Streckungen $\gamma \mapsto \lambda\gamma$ für ein $\lambda > 0$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Spiegelung der Kurve γ an irgendeiner affinen Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ nur das Vorzeichen des Writhe von γ verändert. Das impliziert, dass der Writhe ebener eingebetteter Kurven verschwindet.

(iii) Zeigen Sie, dass der Writhe-Integrand $\mathrm{wr}[\gamma](\cdot,\cdot)$ punktweise verschwindet, falls γ eine eingebettete planare Kurve ist. *Bemerkung: Auch das impliziert natürlich, dass der Writhe ebener eingebetteter Kurven verschwindet.*

(iv) Berechnen Sie mit Hilfe von (ii) und der Invarianz unter Orientierungsumkehr den Writhe der Kurve in Abbildung 1.

Aufgabe 8

[Writhe sphärischer Kurven]

Zeigen Sie:

(i) Sei $\gamma \in C^\infty_{\mathrm{ia}}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^3)$ mit $|\gamma| = 1$ auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Dann ist $\mathrm{Wr}(\gamma) = 0$.

(ii) Welche Regularitätsvoraussetzungen an γ würden hier reichen?

Hinweis zu (i): Nutzen Sie das CFW-Theorem, indem Sie ein explizites Einheitsnormalenfeld d_1 zu γ konstruieren, so dass $\mathrm{Lk}(\gamma, d_1) = 0$ und $u_3 = 0$. Beachten Sie, dass der Writhe integrand $\mathrm{wr}[\gamma]$ nicht notwendig punktweise verschwinden muss, wie es für eine planare Kurve der Fall wäre. Die Aufgabe zeigt außerdem, dass das Verschwinden des Writhe nicht bedeuten muss, dass eine Kurve eben ist.

Aufgabe 9

[Darboux-Vektor für orthonormalen frame]

Seien $d_i \in C^1([0,1], \mathbb{R}^3)$ für $i = 1,2,3$, so dass die Matrix $D(s) = (d_1(s)|d_2(s)|d_3(s)) \in SO(3)$ für alle $s \in [0,1]$. Zeigen Sie:

(i) Es gibt $u \in C^0([0,1], \mathbb{R}^3)$, so dass

$$d_i'(s) = u(s) \wedge d_i(s) \quad \text{für alle } s \in [0,1].$$

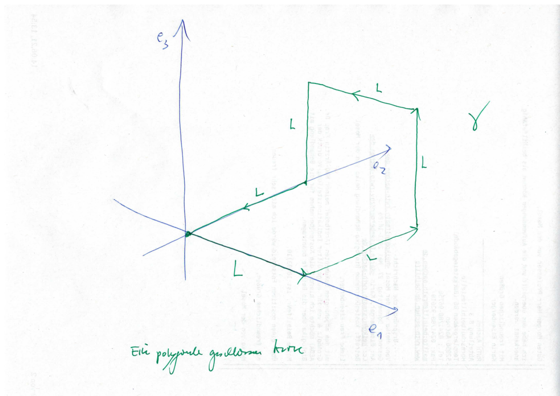

Abbildung 1: Verschiedene Links.

(ii) Für die Komponentenfunktionen $u_i := \langle u, d_i \rangle$ gelten die Identitäten

$$u_i = \varepsilon_{ijk} \langle d_j', d_k \rangle \quad \text{auf } [0,1] \text{ für } i = 1,2,3,$$

wobei ijk eine Permutation von 123 ist, und

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & \text{falls } ijk \text{ eine zyklische Permution von } 123, \\ -1 & \text{falls } ijk \text{ eine zyklische Permution von } 132, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(iii) Es gilt

$$\langle u', d_i \rangle = u_i' \quad \text{auf } [0,1] \text{ für } i = 1,2,3.$$

Hinweis zu (i): Differenzieren Sie die Identität $D(s)D(s)^T = \mathrm{Id}$*, um zu zeigen, dass* $D'(s) = S(s)D(s)$ *für alle* $s \in [0,1]$*, wobei* $S(s)^T = -S(s)$ *für alle* $s \in [0,1]$*. Die Einträge von* S *definieren dann den Vektor* u*.*

Aufgabe 10

[Eingebettete Bänder (ribbons)]

Sei $\gamma \in C^1_{\mathrm{ia}}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^3)$ und $d_1 \in C^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^3)$ mit $|d_1| = 1$ und $\langle \gamma', d_1 \rangle = 0$ auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Zeigen Sie: Es existiert ein $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\gamma, \mathrm{Lip}_{d_1}) > 0$, so dass die Abbildung $F(t,\varepsilon) := \gamma(t) + \varepsilon d_1(t)$ einen periodischen Streifen $S_{\varepsilon_0} := \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \overline{B_{\varepsilon_0}(0)}$ diffeomorph auf sein Bild $F(S_{\varepsilon_0}) \subset \mathbb{R}^3$ abbildet.

Hinweis: Sie können den Satz über inverse Funktionen benutzen, um die Differomorphie zunächst lokal zu beweisen, dann führt ein Überdeckungsargument zu der globalen Aussage.

Aufgabe 11

[Faltungen konvergieren in Sobolev-Slobodeckiĭ-Räumen]

Sei $s \in (0,1)$, $\rho \in [1,\infty)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\gamma \in W^{k+s,\rho}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass für die Faltungen γ_δ, $\delta > 0$, gilt:

$$\|\gamma_\delta - \gamma\|_{W^{k+s,\rho}(\mathbb{R}/\mathbb{Z},\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad \text{für } \delta \to 0.$$

Hinweis: Die Konvergenz in $W^{k,\rho}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *dürfen Sie als bewiesen annehmen, konzentrieren Sie sich also auf die Konvergenz der Seminormen* $[\gamma_\delta^{(k)} - \gamma^{(k)}]_{s,\rho,B_r(0)} \to 0$ *für* $\delta \to 0$ *für* *beliebige Radien $r > 0$. Benutzen Sie (ohne Beweis) zudem, dass für eine Funktion $f \in L^{\rho}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ gilt, dass für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}$*

$$\|f - f(\cdot - \varepsilon z)\|_{L^{\rho}(K)} \to 0 \quad \textit{für } \ \varepsilon \to 0.$$

Aufgabe 12

[Faltungen gleichmäßig in VMO **]**

Zeigen Sie: Für $\gamma \in C^{0,1}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^n)$ mit $\gamma' \in \mathrm{VMO}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^n)$ sind auch die Faltungen $\gamma'_\delta \in \mathrm{VMO}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^n)$ für alle $\delta > 0$. Zudem gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Radius $r_0 = r_0(\varepsilon) > 0$, so dass

$$\sup_{0<r\leq r_0} \left[\sup_{x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \fint_{B_r(x)} |\gamma'_\delta(y) - (\gamma'_\delta)_{x,r}|\, dy \right] \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } \ \delta > 0.$$

Hinweis: Benutzen Sie zum Beweis die Definition der Faltung, den Satz von Fubini und den Transformationssatz.

Aufgabe 13

[Bilipschitzkonstante unter Reparametrisierung auf Bogenlänge]

Seien $\ell > 0$, und $\gamma \in W^{1,1}(\mathbb{R}/\ell\mathbb{Z}, \mathbb{R}^n)$ habe die Länge $L = \mathscr{L}(\gamma) > 0$ und Geschwindigkeit

$$0 < v_\gamma \leq |\gamma'| \leq V_\gamma \quad \text{fast überall auf } \mathbb{R}/\ell\mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie:

(i) Falls die Bogenlängenparametrisierung $\Gamma \in C^{0,1}(\mathbb{R}/L\mathbb{Z}, \mathbb{R}^n)$ die Bilipschitz-Abschätzung

$$|\Gamma(\sigma) - \Gamma(s)| \geq B_\Gamma |\sigma - s|_{\mathbb{R}/L\mathbb{Z}} \qquad \text{für alle } \ s, \sigma \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$$

erfüllt, wobei $B_\Gamma > 0$ ist, dann gilt

$$|\gamma(\tau) - \gamma(t)| \geq B_\Gamma v_\gamma |\tau - t|_{\mathbb{R}/\ell\mathbb{Z}} \qquad \text{für alle } \ t, \tau \in \mathbb{R}/\ell\mathbb{Z}.$$

(ii) Falls andererseits

$$|\gamma(\tau) - \gamma(t)| \geq b_\gamma |\tau - t|_{\mathbb{R}/\ell\mathbb{Z}} \qquad \text{für alle } \ t, \tau \in \mathbb{R}/\ell\mathbb{Z},$$

für eine positive Konstante b_γ, dann gilt

$$|\Gamma(\sigma) - \Gamma(s)| \geq \frac{b_\gamma}{V_\gamma} |\sigma - s|_{\mathbb{R}/L\mathbb{Z}} \qquad \text{für alle } \ s, \sigma \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z}.$$
