Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Till Knoke

Übungen zur Vorlesung Nichtlinearen Funktionalanalysis Serie 1 vom 8.4.2014 Abgabedatum: 17.4.2014

Aufgabe 1

[Fehlerschranke für Fixpunktiteration]

Sei $(\mathscr{M}, d)$ ein vollständiger metrischer Raum mit Metrik $d : \mathscr{M} \times \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ und $f : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ eine Kontraktionsabbildung mit Kontraktionskonstante $K \in (0,1)$. Zeigen Sie: Für $\varepsilon > 0$, $x \in \mathscr{M}$ und $N \in \mathbb{N}$ mit

$$N > \frac{\log \varepsilon + \log(1-K) - \log d(x, f(x))}{\log K}$$

gilt $d(f^N(x), p) < \varepsilon$, wobei $p \in \mathscr{M}$ der eindeutige Fixpunkt von f ist.

Interpretieren Sie anschließend diese Abschätzung in Termen von Rechengenauigkeit: Wenn man $N(m)$ Iterationschritte benötigt, um den Fixpunkt mit m Nachkommastellen genau zu berechnen, wieviele Iterationen braucht man, um eine doppelt hohe Präzision mit $2m$ Nachkommastellen zu erreichen?

Aufgabe 2

[Gleichmäßige Konvergenz im Banachraum]

Seien $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ Banachräume über dem Körper $\mathbb{K}(= \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R})$. Beweisen Sie: Wenn eine Funktionenfolge $f_n : \mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2$ lokal gleichmäßig, d.h. in der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{C^0(B_R(0),\mathscr{B}_2)}$ auf jeder offenen Kugel $B_R(0) \subset \mathscr{B}_1$ gegen eine Funktion $f : \mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2$ konvergiert, und falls jede Funktion f_n in $b \in \mathscr{B}_1$ stetig ist, dann ist auch f in b stetig.

Aufgabe 3

[Unendlichdimensionales lineare Gleichungssystem]

Sei $(a_{ik})_{i,k=1}^{\infty}$ eine Doppelfolge in $\mathbb{K}$ mit $\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < 1$. Zeigen Sie:

(i) Das unendliche lineare Gleichungssystem

$$x_j - \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} x_k = y_j \quad \text{für } \ j = 1,2,\dots \tag{LGS$_\infty$}$$

hat für alle $y = (y_j)_j \in \ell^2$ genau eine Lösung $x = (x_j)_j \in \ell^2$.

(ii) Die endlichen linearen Gleichungssysteme

$$x_j - \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k = y_j \quad \text{für } \ j = 1,\dots,n \tag{LGS$_n$}$$

besitzen eindeutige Lösungen $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}) \in \mathbb{K}^n$. Beweisen Sie, dass für $z_n := (x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}, 0, 0, \dots)$ die Konvergenz $z_n \to x$ in ℓ^2 für $n \to \infty$ gilt, wobei $x \in \ell^2$ die in (i) gefundene Lösung ist.

Aufgabe 4

[Globaler Satz von Picard-Lindelöf]

Zeigen Sie, dass für $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, $t_0 \in [a,b]$, $y_0 \in \mathbb{R}^N$ und $\Phi \in C^0([a,b] \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ mit der Lipschitzbedingung

$$|\Phi(t,y_1) - \Phi(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \qquad \text{für alle } \ y_1, y_2 \in \mathbb{R}^N,\ t \in [a,b],$$

das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = \Phi(t, y(t)) & t \in [a,b] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{AWP}$$

genau eine Lösung $\eta_{y_0} \in C^1([a,b], \mathbb{R}^N)$ hat, und dass die Zuordnung $T : \mathbb{R}^N \to C^0([a,b], \mathbb{R}^N)$ gegeben durch $y_0 \mapsto T(y_0) := \eta_{y_0} \in C^0([a,b], \mathbb{R}^N)$ stetig ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Volterra-Hammerstein-Integralgleichung

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(s, y(s))\, ds, \quad t \in [a,b],$$

und benutzen Sie eine geeignet modifizierte Norm auf $C^0([a,b], \mathbb{R}^N)$, um die Kontraktionseigenschaft zu erzwingen.
