Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Till Knoke

Übungen zur Vorlesung
Nichtlinearen Funktionalanalysis
Serie 2 vom 15.4.2014
Abgabedatum: 24.4.2014

Aufgabe 5

[Null-Lagrangesche]

Zeigen Sie:

(i) Die Lagrangefunktion $L : \mathbb{R}^{N\times n} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$L(P) := \operatorname{tr}(AP) + b = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{n} a_i^\alpha p_\alpha^i + b \tag{1}$$

für beliebige $A = (a_i^\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times N}$ und $b \in \mathbb{R}$ ist eine Null-Lagrangesche.

(ii) Auf $B_1(0) := \{z = (z^1, z^2) \in \mathbb{R}^2 : |z| < 1\}$ seien $u, v \in C^1(B_1(0))$ Lösungen der *Cauchy-Riemann Differentialgleichungen*

$$\begin{cases} u_{z^1} = v_{z^2} \\ u_{z^2} = -v_{z^1} \end{cases} \qquad \text{in } B_1(0).$$

Dann sind die beiden Funktionen

$$L_1(z,P) := u(z)p^1 - v(z)p^2,$$
$$L_2(z,P) := u(z)p^2 + v(z)p^1,$$

für $z = (z^1, z^2) \in \mathbb{R}^2$ und $P = (p^1, p^2) \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^{2\times 1}$ Null-Lagrangesche, wobei die Energiefunktionale

$$\mathscr{L}_i(c) := \int_0^1 L_i(c(t), \dot{c}(t))\, dt, \qquad \text{für } i = 1, 2,$$

auf Kurven $c \in C^1([0,1], \mathbb{R}^2) \cap C^2((0,1), \mathbb{R}^2)$ mit $c([0,1]) \subset B_1(0)$ definiert sind.

(iii)* Beweisen Sie mit Hilfe von (ii) und einer Variante von Lemma 1.10 der Vorlesung die folgende spezielle Variante des *Cauchy Integralsatzes*: Das komplexe Kurvenintegral

$$\int_c f(z)\, dz = \int_0^1 f(c(t), \dot{c}(t))\, dt = \mathscr{L}_1(c) + i\mathscr{L}_2(c)$$

verschwindet für alle in $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ holomorphen Funktionen $f = f(z)$, $z = z^1 + iz^2 \in \mathbb{C}$, und alle Kurven $c \in C^1([0,1], \mathbb{R}^2)$ mit $c(0) = c(1)$ und $c([0,1]) \subset B_1(0)$.

*Hinweis: Aufgaben mit Sternchen * liefern Zusatzpunkte.*

Aufgabe 6

[Grenzen und Anwendung des Brouwerschen Fixpunktsatzes]

(i) Zeigen Sie mit Hilfe eines Beispiels, dass für eine glatte Abbildung $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ für $n \geq 2$ nicht notwendig ein Fixpunkt existieren muss, wobei $\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$.

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe des Brouwerschen Fixpunktsatzes, dass jede Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $a_{ij} \geq 0$ für alle $i, j = 1, \dots, n$, mindestens einen nichtnegativen Eigenwert $\lambda \geq 0$ und dazu einen Eigenvektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $x_i \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ besitzt.

Aufgabe 7

[Retraktionen und Vektorfelder]

(i) Beweisen Sie mit Hilfe des Brouwerschen Fixpunktsatzes (also nicht so wie im Beweis dieses Satzes in der Vorlesung!), dass es keine stetige Abbildung $f : \overline{\mathbb{B}^n} \to \mathbb{S}^{n-1}$ gibt, so dass $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, wobei $\mathbb{B}^n := B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$.

(ii) Zeigen Sie: Jedes stetige Vektorfeld $v \in C^0(\overline{\mathbb{B}^n}, \mathbb{R}^n)$ mit $v(x) = |v(x)|x \neq 0$ für alle $x \in \partial\overline{\mathbb{B}^n}$ besitzt mindestens eine Nullstelle in $\overline{\mathbb{B}^n}$.

(iii) Zeigen Sie: Jedes stetige Vektorfeld $v \in C^0(\overline{\mathbb{B}^n}, \mathbb{R}^n)$ mit $v(x) \cdot x > 0$ für alle $x \in \partial\overline{\mathbb{B}^n}$ besitzt mindestens eine Nullstelle in $\overline{\mathbb{B}^n}$.

(iv) Zeigen Sie die folgende Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes: Jede stetige Abbildung $f : \overline{\mathbb{B}^n} \to \mathbb{R}^n$ mit $f(\partial\overline{\mathbb{B}^n}) \subset \overline{\mathbb{B}^n}$ besitzt mindestens einen Fixpunkt.

(v)* Zeigen Sie: Jedes stetige Vektorfeld $v \in C^0(\overline{\mathbb{B}^n}, \mathbb{R}^n)$ mit $0 \neq v(-x) = -v(x)$ für alle $x \in \partial\overline{\mathbb{B}^n}$ besitzt mindestens eine Nullstelle in $\overline{\mathbb{B}^n}$.

Hinweis: Für Teil (ii) benutze man Teil (i) durch Betrachtung des auf Länge Eins normierten Vektorfeldes, ebenso zum Beweis von Teil (iii), wenn man die auf Länge Eins normierte Version der Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -v(2x) & \textit{für } \; |x| < \frac{1}{2} \\ \left(2 - \frac{1}{|x|}\right)x + 2(|x| - 1)v\left(\frac{x}{|x|}\right) & \textit{für } \; \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1 \end{cases}$$

betrachtet, oder aber einfacher mit Beispiel $\boxed{8}$ *aus Kapitel 1 der Vorlesung nach Fortsetzung von v auf den Ganzraum. Für Teil (iv) benutze man Teil (iii), und Teil (v)* folgt aus (iv). Auch wenn Sie einzelne Teile nicht bewiesen haben, können Sie die zugehörigen Aussagen für andere Teile benutzen.*

Aufgabe 8

[Superlineares Wachstum impliziert Surjektivität]

Zeigen Sie: Jede Abbildung $\Phi \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit

$$\min_{x \in \partial B_R(0)} \frac{\Phi(x) \cdot x}{|x|} \longrightarrow +\infty \quad \text{für } \; R \to \infty$$

ist surjektiv.
