Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Till Knoke

Übungen zur Vorlesung Nichtlinearen Funktionalanalysis Serie 3 vom 22.4.2014 Abgabedatum: 2.5.2014

Aufgabe 9

[Fixpunkte auf konvexen, kompakten Mengen]

Zeigen Sie:

Sei $C \subset \mathscr{W}$ eine nichtleere, konvexe und kompakte Teilmenge eines endlich-dimensionalen linearen normierten Raums $\mathscr{W}$. Dann besitzt jede Abbildung $f \in C^0(C,C)$ mindestens einen Fixpunkt.

Aufgabe 10

[Nichtkompakte stetige Abbildung]

Sei $(\mathscr{V}, \|\cdot\|_{\mathscr{V}})$ ein unendlich-dimensionaler normierter linearer Raum. Zeigen Sie:

(i) Es gibt eine Folge $(v_k)_k \subset \partial B_1(0) \subset \mathscr{W}$, so dass $\|v_i - v_k\|_{\mathscr{V}} \geq 1$ für alle $i \neq k$.

(ii) Konstruieren Sie mit Hilfe von Teil (i) eine Abbildung $f \in C^0(\mathscr{V}, \mathscr{V})$, deren Bild in einem endlich-dimensionalen Unterraum von $\mathscr{V}$ liegt, die aber trotzdem nicht kompakt ist.

Aufgabe 11

[Kompakte Abbildungen]

Zeigen Sie:

(i) Falls $(\mathscr{V}, \|\cdot\|_{\mathscr{V}})$ und $(\mathscr{W}, \|\cdot\|_{\mathscr{W}})$ normierte lineare Räume sind und $\dim \mathscr{V} < \infty$, $M \subset \mathscr{V}$ eine abgeschlossene Teilmenge und $f \in C^0(M, \mathscr{W})$, dann ist $f : M \to \mathscr{W}$ eine kompakte Abbildung.

(ii) Sei $-\infty < a < b < \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $g \in C^0([a,b])$, dann ist die Abbildung $f : C^0([a,b]) \to C^0([a,b])$ definiert durch

$$f(u)(x) := g(x) + \lambda \int_a^b \sin(u(z))\, dz \quad \text{für } x \in [a,b],$$

kompakt.

Aufgabe 12

[Schaefers Fixpunktsatz]

Zeigen Sie:

Sei $\mathscr{B}$ ein reeller Banachraum und $f : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ sei kompakt. Falls die Menge

$$V := \{ v \in \mathscr{B} : \text{ es gibt } \lambda \in [0,1], \text{ so dass } v = \lambda f(v) \}$$

beschränkt ist, dann hat f einen Fixpunkt.

Hinweis: Betrachte für $V \subset B_L(0) \subset \mathscr{B}$ die Abbildung

$$F(w) := \begin{cases} f(w) & \textit{für } \|f(w)\|_{\mathscr{B}} \leq L \\ \frac{L f(w)}{\|f(w)\|_{\mathscr{B}}} & \textit{für } \|f(w)\|_{\mathscr{B}} > L, \end{cases}$$

und wende eine Version des Schauderschen Fixpunktsatzes an.
