Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Till Knoke

Übungen zur Vorlesung
Nichtlinearen Funktionalanalysis
Serie 4 vom 29.4.2014
Abgabedatum: 8.5.2014

Aufgabe 13

[Kompakte Abbildungen]

Seien $(\mathscr{V}, \|\cdot\|_{\mathscr{V}})$, $(\mathscr{W}, \|\cdot\|_{\mathscr{W}})$ und $(\mathscr{Z}, \|\cdot\|_{\mathscr{Z}})$ normierte lineare Räume.

Zeigen Sie:

(i) Eine Abbildung $f : M \subset \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ ist genau dann kompakt, wenn sie stetig ist und wenn für alle beschränkten Folgen $(v_k)_k \subset M$ eine Teilfolge $(v_{k_i})_i \subset (v_k)_k$ existiert, so dass die Bildfolge $f(v_{k_i})$ für $i \to \infty$ in $\mathscr{W}$ konvergiert.

(ii) Ist $f : M \subset \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ kompakt und $g : \overline{f(M)} \to \mathscr{Z}$ stetig, so ist $g \circ f : M \to \mathscr{Z}$ kompakt. Ist andererseits $f : M \subset \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ beschränkt und stetig und $g : f(M) \to \mathscr{Z}$ kompakt, dann ist auch $g \circ f : M \subset \mathscr{V} \to \mathscr{Z}$ kompakt.

Aufgabe 14

[Krasnoselskiis Fixpunktsatz]

Zeigen Sie:

Sei $C \subset \mathscr{B}$ eine nichtleere, abgeschlossene, beschränkte und konvexe Teilmenge des Banachraums $\mathscr{B}$ und $f, g : C \to \mathscr{B}$ seien Abbildungen, so dass

(i) $f(v) + g(w) \in C$ für alle $v, w \in C$,

(ii) f ist eine Kontraktionsabbildung, und

(iii) g ist kompakt.

Dann hat die Abbildung $f + g$ einen Fixpunkt in C.

Aufgabe 15

[Semilineare PDE]

Zeigen Sie für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit glattem Rand $\partial\Omega$ die Existenz einer schwachen Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ des semilinearen Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta v = f(v) & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

wobei für $f \in C^0(\mathbb{R})$ Konstanten $C \geq 0$ und $\alpha \in [0,1)$ existieren, so dass

$$|f(s)| \leq C(1+|s|^\alpha) \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 16

[Fixpunkte von Richtungskontraktionen]

Zeigen Sie:

(i)* Jede Richtungskontraktion in einem vollständigen metrischen Raum hat mindestens einen Fixpunkt.

(ii) Betrachte auf $\mathbb{R}^2$ die Metrik $d(x,y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ für $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ und bestimme die *offenen Segmente* (x,y) zweier Punkte $x, y \in \mathbb{R}^2$ (vgl. Definition 1.26 der Vorlesung). Beweisen Sie anschließend, dass die Abbildung

$$f(x) := \left(\frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{3}x_2, x_1 + \frac{1}{3}x_2\right)$$

zwar keine Kontraktionsabbildung aber doch eine Richtungskontraktion ist. Warum zeigt dieses Beispiel, dass der Fixpunktsatz in Teil (i)* keinen eindeutigen Fixpunkt liefert?
