Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Till Knoke

Übungen zur Vorlesung
Nichtlinearen Funktionalanalysis
Serie 5 vom 7.5.2014
Abgabedatum: 15.5.2014

Aufgabe 17

[Kompaktes Fréchet-Differential]

Seien $\mathscr{B}_1$ und $\mathscr{B}_2$ Banachräume. Sei $\Omega \subset \mathscr{B}_1$ eine offene Teilmenge und $f : \Omega \to \mathscr{B}_2$ eine kompakte Abbildung, die Fréchet-differenzierbar in Ω ist. Dann ist für jedes $u \in \mathscr{B}_1$ die Fréchet-Ableitung $Df(u) \in \mathscr{L}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ ein kompakter linearer Operator.

Hinweis: Eine Abbildung $g : \Omega \subset \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ für lineare normierte Räume $(\mathscr{V}, \|\cdot\|_{\mathscr{V}})$ und $(\mathscr{W}, \|\cdot\|_{\mathscr{W}})$, Ω offen, heißt in $u \in \Omega$ <u>Fréchet-differenzierbar</u>, falls $A \in \mathscr{L}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ existiert, so dass

$$g(w) - g(u) - A(w-u) = o(\|w-u\|_{\mathscr{V}}) \quad \text{für } w \to u,$$

und man schreibt $Dg(u) := A$ für die <u>Fréchet-Ableitung</u> von g in u. Existiert die Fréchet-Ableitung $Dg : \Omega \to \mathscr{L}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathscr{V}$, dann heißt g Fréchet-differenzierbar in Ω. (Ist die Zuordnung $v \mapsto Dg(v)$ als Abbildung von $\Omega \subset \mathscr{V}$ nach $\mathscr{L}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ stetig, dann schreibt man auch $g \in C^1(\Omega, \mathscr{W})$.)

Aufgabe 18

[Beispiel zu verschiedenen Stetigkeitsbegriffen]

Untersuchen Sie die Funktion $g : \mathscr{B} := \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \simeq \mathscr{B}'$ gegeben durch

$$g(x,y) := \begin{cases} \left(\frac{xy^2}{x^2+y^4}, 0\right) & \text{für } x^2+y^2 > 0 \\ (0,0) & \text{für } x = y = 0 \end{cases}$$

hinsichtlich Stetigkeit, Demistetigkeit und Hemistetigkeit. Ist diese Funktion eine monotone Abbildung von $\mathscr{B}$ nach $\mathscr{B}'$?

Aufgabe 19

[Monotone Operatoren]

Sei $\mathscr{B}$ ein reeller reflexiver Banachraum und $f : \mathscr{B} \to \mathscr{B}'$ eine Abbildung.

Zeigen Sie:

(i) f ist genau dann monoton, wenn für alle $u, v \in \mathscr{B}$ die Funktion $t \mapsto \langle f(u + tv), v\rangle_{\mathscr{B}' \times \mathscr{B}}$ auf dem Intervall $[0,1] \subset \mathbb{R}$ monoton wächst.

(ii) Sei f Gâteaux-differenzierbar auf $\mathscr{B}$ mit Gâteaux-Ableitung $\delta f : \mathscr{B} \to \mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathscr{B}')$, und für alle $u, v \in \mathscr{B}$ sei die Funktion $t \mapsto \langle \delta f(u+tv)v, v\rangle_{\mathscr{B}' \times \mathscr{B}}$ stetig auf dem Intervall $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Dann ist f genau dann monoton, wenn

$$\langle \delta f(x)y, y\rangle_{\mathscr{B}' \times \mathscr{B}} \geq 0 \quad \text{für alle } x, y \in \mathscr{B}.$$

Hinweis: Eine Abbildung $g : \Omega \subset \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ für lineare normierte Räume $(\mathscr{V}, \|\cdot\|_{\mathscr{V}})$ und $(\mathscr{W}, \|\cdot\|_{\mathscr{W}})$, Ω offen, heißt in $u \in \Omega$ Gâteaux-differenzierbar, falls $A \in \mathscr{L}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ existiert, so dass

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\Big[g(u+sh) - g(u) - sAh\Big] = 0 \quad \text{für alle } h \in \mathscr{V},$$

und wir schreiben[1] $\delta g(u) := A$ für die Gâteaux-Ableitung von g in u. Existiert die Gâteaux-Ableitung $\delta g : \Omega \to \mathscr{L}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathscr{V}$, dann heißt g Gâteaux-differenzierbar in Ω.

Aufgabe 20

[Basis und endlichdimensionale Approximation]

Sei $(\mathscr{V}, \|\cdot\|_{\mathscr{V}})$ ein unendlichdimensionaler normierter Raum.

Zeigen Sie, dass die folgenden vier Eigenschaften äquivlant sind:

(i) $\mathscr{V}$ ist separabel.

(ii) Es gibt endlich-dimensionale Unterräume $V_n \subset \mathscr{V}$, so dass $V_n \subset V_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n} = \mathscr{V}.$$

(iii) Es existieren endlich-dimensionale Unterräume $E_n \subset \mathscr{V}$, $n \in \mathbb{N}$, so dass $E_n \cap E_m = \{0\}$ für alle $n \neq m$, und

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big(E_1 \oplus \cdots \oplus E_n\Big)} = \mathscr{V}.$$

(iv) Es gibt eine Folge linear unabhängiger Vektoren $(w_k)_k \subset \mathscr{V}$, so dass $\overline{\operatorname{span}\{w_k : k \in \mathbb{N}\}} = \mathscr{V}$. (Man sagt auch, die w_k bilden eine Basis von $\mathscr{V}$.)

---

[1] oder in Anlehnung an die Variationsrechnung $\delta g(u, \cdot) = A(\cdot)$