Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Till Knoke

Übungen zur Vorlesung
Nichtlinearen Funktionalanalysis
Serie 6 vom 13.5.2014
Abgabedatum: 22.5.2014

Aufgabe 21

[Demi- und Hemistetigkeit]

Zeigen Sie:

(i) Sei $\mathscr{B}$ ein Banachraum mit Dualraum $\mathscr{B}'$ und $f : \mathscr{B} \to \mathscr{B}'$ monoton, hemistetig und lokal beschränkt. Dann gilt für $u_n, u \in \mathscr{B}$ mit $u_n \to u$, dass dann $f(u_n) \overset{*}{\rightharpoonup} f(u)$ für[1] $n \to \infty$.

(ii)* Sei nun $f : M \subsetneq \mathscr{B} \to \mathscr{B}'$ monoton und hemistetig. Außerdem sei f lokal beschränkt, was in dieser Situation heißt, dass für Folgen $(u_n)_n \subset M$ mit $u_n \to u \in M$ für $n \to \infty$ die Bildfolge $(f(u_n))_n \subset \mathscr{B}'$ beschränkt ist. Formulieren Sie möglichst allgemeine Bedingungen an den Definitionsbereich M, damit das Resultat in Teil (i) noch wahr ist.

Hinweis: Beachten Sie, dass $\mathscr{B}$ nicht reflexiv sein muss. Für den Beweis von Teil (i) betrachten Sie die spezielle Nullfolge $t_n := \|u_n - u\|_{\mathscr{B}}^{1/2}$ und $w_n := u + t_n v$ für beliebige $v \in \mathscr{B}$, um die Hemistetigkeit ins Spiel zu bringen. Verwenden Sie die Monotonie von f für die Differenz $f(u_n) - f(w_n)$.

Aufgabe 22

[Nemyckii-Operatoren]

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $g : \Omega \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ erfülle die Bedingungen

(i) $x \mapsto g(x,z)$ sei messbar auf Ω für alle $z = (z^1, \dots, z^M) \in \mathbb{R}^M$,

(ii) $z \mapsto g(x,z)$ sei stetig auf $\mathbb{R}^M$ für $\mathscr{L}^n$-fast alle $x \in \Omega$,

(iii) Es gebe eine Funktion $a \in L^q(\Omega)$ und eine Konstante $c > 0$, so dass

$$|g(x,z) \le |a(x)| + c \sum_{i=1}^{M} |z^i|^{p_i/q},$$

für Exponenten $1 \le q, p_i < \infty$, $i = 1, \dots, M$.

Zeigen Sie: Die Abbildung

$$N : L^{p_1}(\Omega) \times \cdots L^{p_M}(\Omega) \to L^q(\Omega)$$

[1] In nichtreflexiven Banachräumen wird die Demistetigkeit oft so definiert.

definiert durch $(Nu)(x) := g(x,u(x))$ für $u = (u^1,\dots,u^M) : \Omega \to \mathbb{R}^M$ mit $u^i \in L^{p_i}(\Omega)$ für $i = 1,\dots,M$ ist stetig und beschränkt und erfüllt die Abschätzung

$$\|Nu\|_{L^q(\Omega)} \leq C\Big[\|a\|_{L^q(\Omega)} + \sum_{i=1}^{M} \|u^i\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{p_i/q}\Big]$$

für alle $u = (u^1,\dots,u^M) \in L^{p_1}(\Omega) \times \cdots L^{p_M}(\Omega)$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Messbarkeit von Nu, bevor Sie die nötigen Abschätzungen zeigen. Für die Stetigkeit können Sie die folgende Variante des Lebegueschen Konvergenzsatzes benutzen: Falls $g_n, h_n \in L^1(\Omega)$ mit $|g_n| \leq h_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $g_n \to g$ und $h_n \to h$ $\mathscr{L}^n$-fast überall in Ω und $\int_\Omega h_n(x)\,dx \to \int_\Omega h(x)\,dx$ für $n \to \infty$, dann folgt $g_n \to g$ in $L^1(\Omega)$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 23

[Differentialoperator in schwacher Formulierung]

Sei $p \in (1,\infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \geq 2n/(n+2)$ und $s \geq 0$. Betrachte den nichtlinearen Operator $f : \mathscr{B} := W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathscr{B}'$ definiert durch:

$$\langle f(u), \eta\rangle_{\mathscr{B}'\times\mathscr{B}} := \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\eta + su\eta\,dx \quad \text{für } u,\eta \in \mathscr{B}.$$

Zeigen Sie, dass f strikt monoton und koerziv ist.

Aufgabe 24

[Divergenzgleichung]

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand und $p \in (1,\infty)$.

Zeigen Sie:

Für alle $g \in (L^p(\Omega))'$ existiert genau eine schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x,\nabla u(x)) = g & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{RWP$_4$}$$

wobei $A = A(x,\xi) : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ messbar in x für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ und stetig in ξ für $\mathscr{L}^n$-fast alle $x \in \Omega$ ist und folgende Bedingungen für alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ und $\mathscr{L}^n$-fast alle $x \in \Omega$ erfüllt:

(i) $|A(x,\xi)| \leq C(h_1(x) + |\xi|^{p-1})$ für eine Funktion $h_1 \in L^q(\Omega)$,

(ii) $(A(x,\xi) - A(x,\eta)) \cdot (\xi - \eta) > 0$ für $\xi \neq \eta$,

(iii) $A(x,\xi) \cdot \xi \geq c|\xi|^p - h_2(x)$ für eine Funktion $h_2 \in L^1(\Omega)$.
