

Übungen zur Vorlesung  
Nichtlinearen Funktionalanalysis  
Serie 7 vom 20.5.2014  
Abgabedatum: 28.5.2014

---

Aufgabe 25

**[Projektion auf konvexe Mengen im Hilbertraum]**

Sei  $C \subset \mathcal{H}$  eine abgeschlossene konvexe Teilmenge eines reellen Hilbertraumes  $\mathcal{H}$ . Zeigen Sie, dass die orthogonale Projektion  $P : \mathcal{H} \rightarrow C$  (vgl. Aufgabe 12, FA, WS13-14), die jedem Punkt  $\eta \in \mathcal{H}$  den eindeutigen nächsten Punkt  $c_\eta \in C$  mit  $\text{dist}(\eta, C) = \|\eta - c_\eta\|_{\mathcal{H}}$  zuordnet, eine monotone Abbildung ist.

---

Aufgabe 26

**[Gegenbeispiel zur Pseudomonotonie]**

Sei  $\mathcal{B} = \mathcal{H}$  ein unendlichdimensionaler Hilbertraum mit Orthonormalsystem  $\{\phi_1, \phi_2, \dots\} \subset \mathcal{H}$ , und betrachten Sie die Abbildungen  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  und  $\pi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  gegeben durch  $f(u) := -u$  und

$$\pi(u) := \begin{cases} u/\|u\|_{\mathcal{H}} & \text{für } \|u\|_{\mathcal{H}} \geq 1 \\ u & \text{für } \|u\|_{\mathcal{H}} < 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass zwar  $f$  die Minty-Bedingung  $(M_2)$  auf  $\mathcal{H}$  erfüllt und  $\pi$  auf  $\mathcal{H} \setminus \{0\}$  monoton und stetig ist, dass aber die Summe  $g := f + \pi$  *nicht* die Bedingung  $(M_2)$  erfüllt.

*Hinweis: Betrachten Sie  $u_n := \phi_1 + \phi_n$ .*

---

## Aufgabe 27

### [Pseudomonotonie]

Sei  $\mathcal{B}$  ein reeller, reflexiver Banachraum mit Dualraum  $\mathcal{B}'$  und  $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ .

Zeigen Sie:

- (i) Falls  $f$  stark stetig ist, dann ist  $f$  pseudomonoton.
- (ii) Falls  $f$  pseudomonoton und lokal beschränkt ist, dann ist  $f$  demistetig.

## Aufgabe 28

### [Dualitätsabbildung]

Ein Banachraum  $\mathcal{B}$  heißt *strikt konvex*, wenn aus  $\|v\|_{\mathcal{B}} \leq 1$  und  $\|w\|_{\mathcal{B}} \leq 1$  und  $v \neq w$ ,  $v, w \in \mathcal{B}$ , folgt, dass  $\|v + w\|_{\mathcal{B}} < 2$ .

- (i) Zeigen Sie: Ist der Dualraum  $\mathcal{B}'$  eines Banachraums  $\mathcal{B}$  strikt konvex, dann existiert zu jedem  $v \in \mathcal{B}$  genau ein Element  $Jv \in \mathcal{B}'$ , so dass

$$\langle Jv, v \rangle_{\mathcal{B}' \times \mathcal{B}} = \|v\|_{\mathcal{B}}^2 = \|Jv\|_{\mathcal{B}'}^2.$$

(Auch wenn  $J$  (für einen nicht strikt konvexen Dualraum) mengenwertig sein kann, nennt man diese Abbildung die *Dualitätsabbildung*.)

- (ii) Zeigen Sie unter den Voraussetzungen wie in Teil (i), dass die Dualitätsabbildung monoton ist.
- 
-