Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Till Knoke

Übungen zur Vorlesung Nichtlinearen Funktionalanalysis Serie 8 vom 27.5.2014 Abgabedatum: 5.6.2014

Aufgabe 29

[Subdifferentiale I]

(i) Berechnen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \sin x$ für $x \in \mathbb{R}$ das Subdifferential $\partial f : \mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$, wobei $\mathscr{P}(M)$ die Potenzmenge einer Menge M bezeichnet.

(ii) Berechnen Sie die Subdifferentiale der Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0, \end{cases} \qquad h(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

(iii) Zeigen Sie für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die die Ableitung $f'(x)$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ existiert und das Subdifferential $\partial f(x)$ nicht die leere Menge ist, die Identität $\partial f(x) = \{f'(x)\}$.

Aufgabe 30

[Dualitätsabbildung in anderer Form]

Sei $\mathscr{H}$ ein reeller Hilbertraum und $\phi(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2_{\mathscr{H}}$. Zeigen Sie, dass dann das Subdifferential $\partial\phi : \mathscr{H} \to \mathscr{P}(\mathscr{H}')$ punktweise einelementig ist, d.h. $\sharp\partial\phi(u) = 1$ für alle $u \in \mathscr{H}$, und die einelementige Menge $\partial\phi(u) \in \mathscr{P}(\mathscr{H}')$ wird dann mit ihrem Element in $\mathscr{H}'$ identifiziert. Zeigen Sie (nach dieser Identifikation), dass dann gilt

$$\langle \partial\phi(u), v\rangle_{\mathscr{H}' \times \mathscr{H}} = \langle u, v\rangle_{\mathscr{H}} \qquad \text{für alle } u, v \in \mathscr{H},$$

und vergleichen Sie $\partial\phi$ mit der Dualitätsabbildung aus Aufgabe 28.

Hinweis: Zeigen Sie, dass ϕ konvex ist und Gâteaux-differenzierbar ist, um Lemma 2.20 aus der Vorlesung anzuwenden.

Aufgabe 31

[Subdifferentiale II]

Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum über $\mathbb{R}$, und $f : \mathscr{H} \to (-\infty, \infty]$ mit $f \not\equiv +\infty$ sei konvex und unterhalbstetig.

Zeigen Sie:

(i) $\operatorname{effdom}(\partial f) \subset \{u \in \mathscr{H} : f(u) < \infty\}$.

(ii) $\partial f : \mathscr{H} \to \mathscr{P}(\mathscr{H}')$ ist monoton.

(iii)* Für jedes $w \in \mathscr{H}$ und $\lambda > 0$ gibt es genau ein $u \in \operatorname{effdom}(\partial f)$, so dass

$$w \in u + \lambda \partial f(u),$$

d.h. es gibt $u \in \operatorname{effdom}(\partial f)$ und $v \in \partial f(u)$, so dass

$$w = u + \lambda v.$$

Hinweis: Für Teil (iii) dürfen Sie ohne Beweis benutzen, dass f als konvexe unterhalbstetige Funktion auch unterhalbstetig bezüglich der schwachen Konvergenz ist (vgl. Beispiel $\boxed{15}$ in Kapitel 2 der FA-Vorlesung im WS 13-14). Dann kann man mit der direkten Methode der Variationsrechnung (vgl. Beweis von Satz 2.19) das Funktional*

$$\mathscr{F}(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2_{\mathscr{H}} + \lambda f(u) - \langle u, w \rangle_{\mathscr{H}}$$

auf $\mathscr{H}$ minimieren, sobald man die Abschätzung $f(u) \geq -C(1 + \|u\|_{\mathscr{H}})$, $C > 0$, für beliebige $u \in \mathscr{H}$ (z.B. durch Widerspruchsargument) gezeigt hat. Benutze für den so gefundenen Minimierer abschließend Lemma 2.18.

Aufgabe 32

[Subdifferential eines Integralfunktionals]

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $p \in [1, \infty)$ und $q \in (1, \infty]$ der konjugierte Exponent, d.h. $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Dann ist $(L^p(\Omega))'$ isometrisch isomorph zu $L^q(\Omega)$ und für jedes stetige Funktional $l \in (L^p(\Omega))'$ existiert genau ein $w \in L^q(\Omega)$, so dass $l(v) = \int_\Omega w(x)v(x)\,dx$ für alle $v \in L^p(\Omega)$ (vgl. Beispiel $\boxed{12}$ in Kapitel 2, FA, WS13-14).

Zeigen Sie für eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \circ v \in L^1(\Omega)$ für alle $v \in L^p(\Omega)$, und für das Integralfunktional $\Phi : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi(v) := \int_\Omega \varphi(v(x))\,dx,$$

dass die folgende Äquivalenz gilt:

$$w \in \partial\Phi(u) \Leftrightarrow w(x) \in \partial\varphi(u(x)) \quad \text{für } \mathscr{L}^n\text{-fast alle } x \in \Omega.$$
